MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง พื้นที่ของรูปเรขาคณิต

www.mathstandard.com

เรื่อง พื้นที่ของรูปเรขาคณิต

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง พื้นที่ของรูปเรขาคณิต ครอบคลุม หน่วยวัด สูตรพื้นที่ อัตราส่วนและความคล้าย การแบ่งรูปพื้นที่จากพิกัด วงกลม ส่วนของวงกลม และรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ หน่วยวัด อัตราส่วน สมการ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความคล้าย และอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมสำคัญ

ขอบเขตและข้อตกลง

- ใช้ Area แทนพื้นที่ P แทนความยาวรอบรูป S แทนพื้นที่ผิว และ V แทนปริมาตร โดยระบุความหมายของตัวแปรภายในแต่ละหัวข้อหรือตัวอย่าง
- ในสามเหลี่ยม ABC ด้านตรงข้ามมุม A, B, C ใช้ $a = BC, b = CA, c = AB$ ตามลำดับ หากใช้อักษรแทนปริมาณอื่น จะกำหนดความหมายในบริบทนั้น
- ความสูงต้องเป็นระยะตั้งฉากกับฐาน ใช้หน่วยความยาวและพื้นที่ให้สอดคล้องกัน และไม่วัดความยาวจากรูปแทนข้อมูลที่กำหนด
- สูตรเชือกรองเท้าใช้กับรูปนูนหรือเว้าที่ไม่มีด้านตัดกันเอง ต้องเรียงจุดตามขอบรูปและเขียนจุดแรกซ้ำท้ายสุด
- ค่าที่มี π หรือกรณฑ์ให้ตอบเป็นค่าที่แน่นอน เว้นแต่กำหนดให้ประมาณค่า มุมในสูตรส่วนของวงกลมและตรีโกณมิติใช้หน่วยองศา

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

เรื่อง พื้นที่ของรูปเรขาคณิต

สารบัญ

ตอนที่ 1 การวัดพื้นที่และการเลือกใช้สูตร

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–16 15

ตอนที่ 2 อัตราส่วนพื้นที่และรูปคล้าย

เนื้อหาและตัวอย่าง 26

แบบฝึกหัดข้อ 17–35 36

ตอนที่ 3 การแบ่งพื้นที่ในรูปสี่เหลี่ยม

เนื้อหาและตัวอย่าง 48

แบบฝึกหัดข้อ 36–51 55

ตอนที่ 4 พื้นที่บนพิกัดและสมการจากพื้นที่

เนื้อหาและตัวอย่าง 65

แบบฝึกหัดข้อ 52–67 75

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พื้นที่ของรูปเรขาคณิต

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 วงกลม วงแหวน และการเปลี่ยนขนาด

เนื้อหาและตัวอย่าง 86

แบบฝึกหัดข้อ 68–83 93

ตอนที่ 6 วงกลมและพื้นที่ระหว่างส่วนโค้ง

เนื้อหาและตัวอย่าง 103

แบบฝึกหัดข้อ 84–99 114

ตอนที่ 7 รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

เนื้อหาและตัวอย่าง 128

แบบฝึกหัดข้อ 100–115 134

สรุปเนื้อหา เรื่อง พื้นที่ของรูปเรขาคณิต 144

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 116–135 153

เฉลยคำตอบ 163

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 169

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

การวัดพื้นที่และการเลือกใช้สูตร

1.1 ความหมายของพื้นที่และหน่วยวัด

พื้นที่เป็นปริมาณที่บอกขนาดของบริเวณบนระนาบ วัดโดยเปรียบเทียบกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดเป็นหนึ่งหน่วย ส่วนความยาวรอบรูปเป็นผลรวมความยาวของเส้นขอบ จึงมีหน่วยและความหมายแตกต่างกัน

หน่วยความยาวและหน่วยพื้นที่

ถ้า 1 หน่วยใหญ่เท่ากับ m หน่วยเล็ก จะได้

$$1 \text{ ตารางหน่วยใหญ่} = m^2 \text{ ตารางหน่วยเล็ก}$$

$$1 \text{ ตารางเมตร} = 10{,}000 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

$$1 \text{ ตารางวา} = 4 \text{ ตารางเมตร} \qquad 1 \text{ ไร่} = 1{,}600 \text{ ตารางเมตร}$$

การเปลี่ยนหน่วยพื้นที่ต้องเปลี่ยนทั้งสองมิติ เช่น จัตุรัสด้านยาว 1 เมตรมีด้านยาว 100 เซนติเมตร พื้นที่จึงเป็น 100×100 ตารางเซนติเมตร ไม่ใช่ 100 ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่าง 1 แผ่นไม้มีพื้นที่ 0.36 ตารางเมตร จงเขียนเป็นตารางเซนติเมตร
วิธีคิด ใช้ 1 ตารางเมตรเท่ากับ $10{,}000$ ตารางเซนติเมตร จึงได้ $0.36 \times 10{,}000 = 3{,}600$ ตารางเซนติเมตร
ตอบ $3{,}600$ ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่าง 2 ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 5 วา ยาว 12 วา จงหาพื้นที่เป็นตารางเมตร
วิธีคิด พื้นที่เท่ากับ $5(12) = 60$ ตารางวา จึงเท่ากับ $60(4) = 240$ ตารางเมตร
ตอบ 240 ตารางเมตร

MathStandard
MathStandard
MathStandard

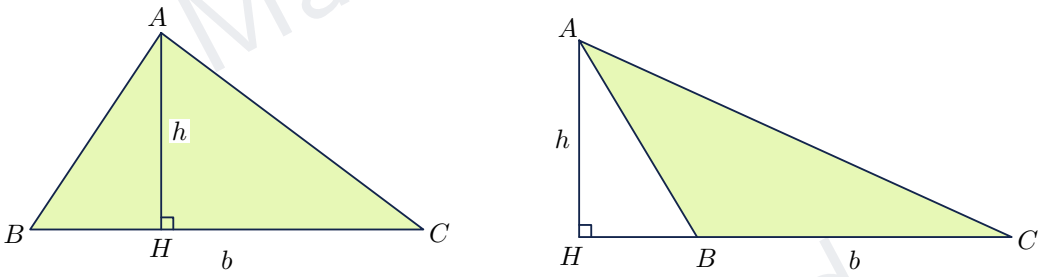
1.2 พื้นที่สามเหลี่ยมและการเลือกความสูง

เลือกด้านใดด้านหนึ่งเป็นฐานได้ ความสูงที่ใช้คู่กับฐานนั้นต้องเป็นระยะตั้งฉากจากจุดยอดตรงข้ามถึงเส้นตรงที่รองรับฐาน ในสามเหลี่ยมมุมป้าน จุดตั้งฉากอาจอยู่บนส่วนต่อของฐาน

ฐานกับความสูงต้องเป็นคู่กัน

ให้ฐานยาว b และความสูงที่ตั้งฉากกับฐานยาว h

$$\text{Area} = \frac{1}{2}bh$$



เมื่อนำสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการสองรูปมาประกอบกันเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะได้พื้นที่ bh พื้นที่สามเหลี่ยมแต่ละรูปจึงเป็นครึ่งหนึ่ง การใช้ด้านเอียงแทนความสูงจะใช้ได้เฉพาะเมื่อด้านนั้นตั้งฉากกับฐาน

ตัวอย่าง 3 สามเหลี่ยมมีฐานยาว 15 เซนติเมตร และระยะตั้งฉากจากจุดยอดถึงแนวฐานยาว 8 เซนติเมตร จงหาพื้นที่

วิธีคิด ใช้ฐาน 15 คู่กับความสูง 8 ได้พื้นที่ $\frac{1}{2}(15)(8) = 60$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 60 ตารางเซนติเมตร

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.3 สี่เหลี่ยมผืนผ้า จัตุรัส และด้านขนาน

สี่เหลี่ยมผืนผ้า มี พื้นที่ เท่ากับ ผลคูณ ของ ด้าน ที่ ติด กัน ส่วน สี่เหลี่ยมจัตุรัส มี ด้าน ทั้ง สี่ เท่ากัน สำหรับ สี่เหลี่ยมด้านขนาน การตัดส่วนสามเหลี่ยมจากปลายด้านหนึ่งไปต่ออีกด้านหนึ่งทำให้ได้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีฐานและความสูงเท่าเดิม

สูตรพื้นที่และความยาวรอบรูป

ให้ P เป็นความยาวรอบรูป

สี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง w ยาว ℓ $\quad \text{Area} = w\ell, \quad P = 2(w+\ell)$

สี่เหลี่ยมจัตุรัสด้านยาว s $\quad \text{Area} = s^2, \quad P = 4s$

สี่เหลี่ยมด้านขนานฐานยาว b สูง h $\quad \text{Area} = bh$



ความสูง h ของสี่เหลี่ยมด้านขนานต้องตั้งฉากกับฐาน b

ตัวอย่าง 4 กรอบสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความยาวรอบรูป 50 เซนติเมตร และด้านยาวยาวกว่าด้านกว้าง 5 เซนติเมตร จงหาพื้นที่

วิธีคิด ให้ด้านกว้างเป็น x เซนติเมตร ด้านยาวเป็น $x+5$ จาก $2[x+(x+5)]=50$ ได้ $2x+5=25$ จึงมี $x=10$ และด้านยาว 15 พื้นที่จึงเท่ากับ $10(15)=150$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 150 ตารางเซนติเมตร

MathStandard

1.4 คางหมูและรูปที่มีเส้นทแยงมุมตั้งฉาก

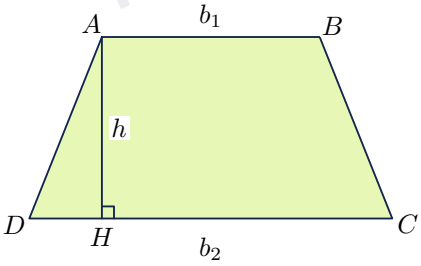
สี่เหลี่ยมคางหมูมีด้านคู่ขนานสองด้านเป็นฐาน ความสูงคือระยะตั้งฉากระหว่างฐาน เมื่อนำคางหมูที่เท่ากันสองรูปมาต่อกัน จะได้สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานเท่ากับผลบวกของฐานทั้งสอง

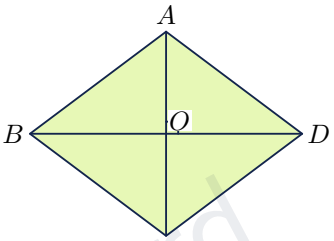
สูตรที่ใช้กับรูปสี่เหลี่ยม

คางหมูมีฐานยาว b_1, b_2 และสูง h $\quad \text{Area} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$

สี่เหลี่ยมนูนมีเส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน ยาว d_1, d_2

$$\text{Area} = \frac{1}{2}d_1 d_2$$





สูตรเส้นทแยงมุมใช้กับขนมเปียกปูนและรูปว่าวที่มีเส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน โดยรวมพื้นที่สามเหลี่ยมสี่รูปที่เกิดขึ้นจากเส้นทแยงมุม

ตัวอย่าง 5 คางหมูมีฐานยาว $9, 15$ หน่วยและสูง 6 หน่วย จงหาพื้นที่

วิธีคิด พื้นที่เท่ากับ $\frac{1}{2}(9+15)(6) = 72$ ตารางหน่วย

ตอบ 72 ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 6 ขนมเปียกปูนมีพื้นที่ 120 ตารางหน่วยและเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งยาว 16 หน่วย จงหาอีกเส้น

วิธีคิด ให้เส้นทแยงมุมอีกเส้นยาว d หน่วย จาก $120 = \frac{1}{2}(16)d$ ได้ $d = 15$

ตอบ 15 หน่วย

MathStandard
MathStandard
MathStandard

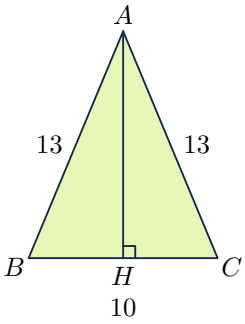
1.5 การหาความสูงด้วยพีทาโกรัส

เมื่อยังไม่ทราบความสูง ให้พิจารณาลากเส้นตั้งฉากเพื่อสร้างสามเหลี่ยมมุมฉากก่อน ในสามเหลี่ยมหน้าจั่วเส้นสูงจากมุมยอดจะแบ่งฐานครึ่งหนึ่ง จึงใช้ครึ่งฐานและด้านเท่าเพื่อหาความสูงได้

ความสูงของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ให้ฐานยาว a และด้านเท่าแต่ละด้านยาว b โดย $2b > a > 0$

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad \text{Area} = \frac{1}{2}ah$$



เส้นสูง AH แบ่งฐาน BC ออกเป็นสองส่วนเท่ากัน

ตัวอย่าง 7 สามเหลี่ยมหน้าจั่วมีด้านเท่ายาวด้านละ 13 หน่วยและฐานยาว 10 หน่วย จงหาพื้นที่

วิธีคิด ให้ H เป็นจุดกึ่งกลางฐาน จึงมี $BH = HC = 5$ และ $AH \perp BC$ จากพีทาโกรัส $AH^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ ได้ $AH = 12$ พื้นที่เท่ากับ $\frac{1}{2}(10)(12) = 60$ ตารางหน่วย

ตอบ 60 ตารางหน่วย

ถ้าด้านประกอบมุมฉากมีอัตราส่วน $m : n$ ให้เขียนเป็น mt, nt โดย $t > 0$ แล้วใช้ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากหาค่า t ก่อนคำนวณพื้นที่

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.6 พื้นที่เมื่อทราบความยาวสามด้าน

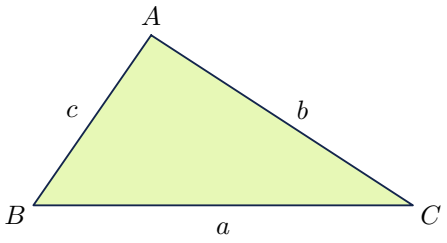
ความยาวสามด้านสร้างสามเหลี่ยมได้เมื่อแต่ละด้านสั้นกว่าผลบวกของอีกสองด้าน หากไม่มีความสูงกำหนดมา อาจใช้พีทาโกรัสร่วมกับการแบ่งฐาน หรือใช้สูตรเฮรอน

สูตรเฮรอน

สามเหลี่ยมมีด้านยาว a, b, c และให้ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ตัวแปร s คือครึ่งหนึ่งของความยาวรอบรูป และต้องมี $s-a, s-b, s-c > 0$



ด้าน $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ อยู่ตรงข้ามจุดยอด A, B, C ตามลำดับ

สูตรนี้ใช้กับสามเหลี่ยมทั่วไป ไม่จำเป็นต้องเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อด้านมีหน่วยเดียวกัน ค่าภายในกรณฑ์มีหน่วยยกกำลังสี่ ถอดรากที่สองแล้วจึงเป็นหน่วยพื้นที่

ตัวอย่าง 8 สามเหลี่ยมมีด้านยาว $13, 14, 15$ เซนติเมตร จงหาพื้นที่

วิธีคิด ครึ่งหนึ่งของความยาวรอบรูปคือ $s = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$ แทนค่าในสูตรเฮรอน

$$\text{Area} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$$

จึงได้พื้นที่ 84 ตารางเซนติเมตร

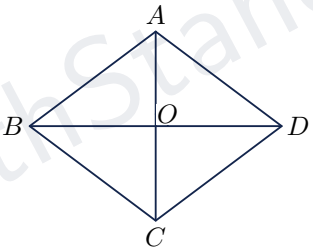
ตอบ 84 ตารางเซนติเมตร

กรณีสามเหลี่ยมด้านเท่าด้านยาว s เส้นสูงยาว $\dfrac{\sqrt{3}s}{2}$ จึงมีพื้นที่ $\dfrac{\sqrt{3}s^2}{4}$ โดยตัวแปร s ในกรณีนี้หมายถึงความยาวด้าน

เรื่อง พื้นที่ของรูปเรขาคณิต | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 แผ่นตกแต่งรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีพื้นที่ 216 ตารางเซนติเมตร เส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งยาว 24 เซนติเมตร จงหาความยาวเส้นทแยงมุมอีกเส้น



ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 ป้ายรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีด้านคู่ขนานยาว 14 และ 22 เซนติเมตร มีพื้นที่ 144 ตารางเซนติเมตร จงหาระยะตั้งฉากระหว่างด้านคู่ขนาน



ตอบ . . . . . .

เรื่อง พื้นที่ของรูปเรขาคณิต | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 แผ่นวัสดุมีพื้นที่ 0.075 ตารางเมตร จงเขียนพื้นที่เป็นตารางเซนติเมตร

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 สี่เหลี่ยมด้านขนานมีฐานยาว 18 เซนติเมตร และความสูงตั้งฉากกับฐาน 7 เซนติเมตร จงหาพื้นที่

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พื้นที่ของรูปเรขาคณิต

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	18 เซนติเมตร
2	8 เซนติเมตร
3	750 ตารางเซนติเมตร
4	126 ตารางเซนติเมตร
5	600 ตารางเซนติเมตร
6	84 ตารางเซนติเมตร
7	280 ตารางเซนติเมตร
8	$1{,}024$ ตารางเมตร
9	120 ตารางหน่วย
10	84 ตารางเซนติเมตร
11	32 ตารางเซนติเมตร
12	296 ตารางหน่วย
13	$75\sqrt{3}$ ตารางหน่วย
14	20 หน่วย
15	120 ตารางหน่วย
16	180 แผ่น
17	63 ตารางหน่วย
18	36 ตารางหน่วย
19	42 ตารางหน่วย
20	72 ตารางหน่วย
21	128 ตารางหน่วย

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 การวัดพื้นที่และการเลือกใช้สูตร

ข้อ 1 ให้ d เป็นความยาวเส้นทแยงมุมที่ไม่ทราบ เส้นทแยงมุมของขนมเปียกปูนตั้งฉากกัน จึงได้ $216 = \frac{1}{2}(24)d$ ดังนั้น $d = 18$ เซนติเมตร

ตอบ 18 เซนติเมตร

ข้อ 2 ให้ h เป็นระยะตั้งฉากระหว่างฐาน จาก $144 = \frac{1}{2}(14+22)h = 18h$ ได้ $h = 8$ เซนติเมตร

ตอบ 8 เซนติเมตร

ข้อ 3 ใช้ 1 ตารางเมตรเท่ากับ 10,000 ตารางเซนติเมตร จึงได้ $0.075(10{,}000) = 750$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 750 ตารางเซนติเมตร

ข้อ 4 ใช้ฐานและความสูงที่ตั้งฉากกัน ได้พื้นที่ $18(7) = 126$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 126 ตารางเซนติเมตร

ข้อ 5 ให้ด้านประกอบมุมฉากเป็น $3t, 4t$ โดย $t > 0$ พีทาโกรัสให้ $9t^2 + 16t^2 = 50^2$ ได้ $t = 10$ ด้านทั้งสองจึงยาว $30, 40$ เซนติเมตร พื้นที่คือ $\frac{1}{2}(30)(40) = 600$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 600 ตารางเซนติเมตร

ข้อ 6 ให้ s เป็นครึ่งหนึ่งของความยาวรอบรูป ได้ $s = \dfrac{10+17+21}{2} = 24$ สูตรเฮรอนให้พื้นที่ $\sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)} = \sqrt{7056} = 84$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 84 ตารางเซนติเมตร

ข้อ 7 ให้ด้านกว้างยาว x เซนติเมตร ด้านยาวคือ $x+6$ จาก $2[x+(x+6)] = 68$ ได้ $x = 14$ ดังนั้นด้านยาวเท่ากับ 20 และพื้นที่คือ $14(20) = 280$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 280 ตารางเซนติเมตร

ข้อ 8 ให้ด้านกว้างเป็น x วา ได้ $2(x+4x) = 80$ จึงมี $x = 8$ ด้านยาวเท่ากับ 32 วา พื้นที่เท่ากับ $8(32) = 256$ ตารางวา เมื่อ 1 ตารางวาเท่ากับ 4 ตารางเมตร จึงมีพื้นที่ $256(4) = 1024$ ตารางเมตร

ตอบ 1,024 ตารางเมตร

ข้อ 9 เส้นสูงจากมุมยอดแบ่งฐานเป็นสองส่วนยาวส่วนละ 8 หน่วย ความสูงจึงเป็น $\sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ หน่วย พื้นที่เท่ากับ $\dfrac{1}{2}(16)(15) = 120$ ตารางหน่วย

ตอบ 120 ตารางหน่วย

ข้อ 10 ครึ่งหนึ่งของความยาวรอบรูปเป็น $s = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$ เซนติเมตร พื้นที่จึงเป็น $\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 84 ตารางเซนติเมตร