MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต

www.mathstandard.com

เรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต ครอบคลุม มุม รูปหลายเหลี่ยม สามเหลี่ยมหน้าจั่ว เส้นขนาน เส้นและจุดสำคัญของสามเหลี่ยม อัตราส่วนพื้นที่ และเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลาง เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ อัตราส่วน สมการเชิงเส้น พื้นที่ และทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ขอบเขตและข้อตกลง

- ในสามเหลี่ยม ABC ใช้ $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ แทนความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ ชื่อมุมสามตัวอักษรมีจุดยอดเป็นอักษรกลาง
- ขนาดมุมใช้หน่วยองศา ความยาวและอัตราส่วนใช้ค่าบวก รูปหลายเหลี่ยมอย่างง่ายไม่มีด้านตัดกันเอง และต้องนับมุมกลับที่จุดเว้าเป็นมุมภายใน
- ใช้ Area แทนพื้นที่ ระบุตัวแปรและตำแหน่งจุดในหัวข้อหรือตัวอย่างที่เกี่ยวข้อง เส้นสูงและมัธยฐานมีนิยามต่างกัน
- รูปประกอบแสดงความสัมพันธ์ การคำนวณอาศัยข้อมูลและเครื่องหมายที่กำหนด ไม่ใช้การวัดจากภาพหรืออนุมานความเท่ากันจากลักษณะรูป
- การใช้ทฤษฎีบทต้องตรวจเงื่อนไข เช่น ความขนาน ตำแหน่งจุดแบ่ง และส่วนต่อของด้าน คำตอบใช้ค่าที่แน่นอน เว้นแต่ระบุการประมาณค่า

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

เรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต

สารบัญ

ตอนที่ 1 มุมพื้นฐานและการหาขนาดของมุม

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–16 14

ตอนที่ 2 สามเหลี่ยมหน้าจั่วและด้านที่เท่ากัน

เนื้อหาและตัวอย่าง 23

แบบฝึกหัดข้อ 17–32 30

ตอนที่ 3 เส้นขนานและเส้นตัด

เนื้อหาและตัวอย่าง 39

แบบฝึกหัดข้อ 33–48 44

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 4 เส้นสำคัญและจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยม

เนื้อหาและตัวอย่าง 53

แบบฝึกหัดข้อ 49–64 65

ตอนที่ 5 การแบ่งด้านและอัตราส่วนพื้นที่

เนื้อหาและตัวอย่าง 74

แบบฝึกหัดข้อ 65–84 86

ตอนที่ 6 จุดกึ่งกลางในสี่เหลี่ยมคางหมู

เนื้อหาและตัวอย่าง 96

แบบฝึกหัดข้อ 85–100 102

สรุปเนื้อหา เรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต 111

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 101–120 117

เฉลยคำตอบ 127

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 133

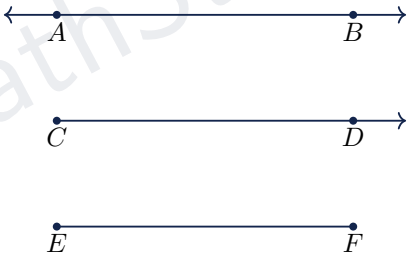
MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

มุมพื้นฐานและการหาขนาดของมุม

1.1 จุด เส้นตรง รังสี และส่วนของเส้นตรง

เรขาคณิตศึกษาตำแหน่ง รูปร่าง ขนาด และความสัมพันธ์ของรูป จุดใช้ระบุตำแหน่งและไม่มีขนาด นิยมกำหนดชื่อด้วยอักษรพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C ส่วนเส้นตรงทอดยาวออกไปได้ทั้งสองทิศทาง



หัวลูกศรบอกทิศทางที่เส้นทอดยาวต่อไปได้

สิ่งที่พิจารณา	สัญลักษณ์	ความหมาย
เส้นตรงผ่าน A, B	$\overleftrightarrow{AB}$	ไม่มีจุดปลาย และไม่จำกัดความยาว
รังสีจาก C ผ่าน D	$\overrightarrow{CD}$	มีจุดปลายที่ C เพียงจุดเดียว
ส่วนของเส้นตรง EF	$\overline{EF}$	มีจุดปลายสองจุด คือ E, F

ความยาวและจุดกึ่งกลาง

ในสมการเกี่ยวกับความยาว ใช้ AB แทนความยาวของ $\overline{AB}$ หากจุด A, M, B อยู่บนเส้นตรงเดียวกันตามลำดับ จะมี $AB = AM + MB$ และ M เป็นจุดกึ่งกลางของ AB ก็ต่อเมื่อ $AM = MB$

> **สมบัติพื้นฐานของเส้นตรง**
> มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวผ่านจุดที่แตกต่างกันสองจุด ส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นมีจุดกึ่งกลางเพียงจุดเดียว

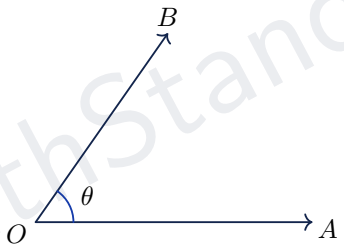
ตัวอย่าง 1 จุด A, M, B อยู่บนเส้นตรงเดียวกันตามลำดับ ถ้า $AB = 18$ เซนติเมตร และ M เป็นจุดกึ่งกลางของ AB จงหา AM

วิธีคิด จากนิยามจุดกึ่งกลางมี $AM = MB$ และ $AM + MB = 18$ จึงได้ $2AM = 18$ ดังนั้น $AM = 9$ เซนติเมตร

ตอบ 9 เซนติเมตร

1.2 มุมและการอ่านชื่อมุม

มุมเกิดจากรังสีสองเส้นที่มีจุดปลายร่วมกัน จุดปลายร่วมเรียกว่า **จุดยอดของมุม** และรังสีทั้งสองเรียกว่า **แขนของมุม** สัญลักษณ์ $\angle AOB$ หมายถึงมุมที่มีจุดยอด O และแขนเป็นรังสี OA, OB ตัวอักษรที่อยู่ตรงกลางจึงเป็นชื่อจุดยอดเสมอ



มุม AOB มีขนาด θ และมีจุดยอดที่ O

ชนิดของมุม	ขนาดมุม
มุมแหลม	มากกว่า 0° แต่น้อยกว่า 90°
มุมฉาก	เท่ากับ 90°
มุมป้าน	มากกว่า 90° แต่น้อยกว่า 180°
มุมตรง	เท่ากับ 180°
มุมกลับ	มากกว่า 180° แต่น้อยกว่า 360°

เครื่องหมายที่ใช้ในรูป

เครื่องหมายสี่เหลี่ยมเล็กแสดงมุมฉาก เครื่องหมายขีดแบบเดียวกันบนด้านแสดงความยาวเท่ากัน และเครื่องหมายส่วนโค้งแบบเดียวกันแสดงขนาดมุมเท่ากัน ต้องใช้ข้อมูลเหล่านี้ร่วมกับเงื่อนไขที่กำหนด ไม่อนุมานจากลักษณะภาพเพียงอย่างเดียว

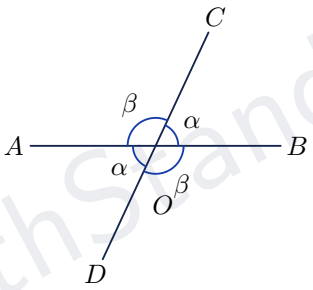
ตัวอย่าง 2 รังสี OC อยู่ภายในมุมฉาก AOB และ $\angle AOC = 32^\circ$ จงหา $\angle COB$

วิธีคิด เนื่องจาก OC แบ่งมุม AOB ออกเป็นสองส่วนที่ไม่ทับกัน จึงมี $\angle AOC + \angle COB = 90^\circ$ ดังนั้น $\angle COB = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$

ตอบ 58°

1.3 มุมบนเส้นตรง มุมรอบจุด และมุมตรงข้าม

มุมประชิดบนเส้นตรงมีแขนด้านนอกเป็นรังสีตรงข้ามกัน จึงมีผลรวม 180° ส่วนมุมที่แบ่งบริเวณรอบจุดครบหนึ่งรอบโดยไม่ทับกันมีผลรวม 360°



เส้นตรง AB และ CD ตัดกันที่ O

ความสัมพันธ์ของมุมเมื่อเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

มุมตรงข้ามกันมีขนาดเท่ากัน และมุมประชิดแต่ละคู่มีผลรวม 180°

$$\angle BOC = \angle AOD = \alpha \qquad \angle AOC = \angle BOD = \beta$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

เหตุที่มุมตรงข้ามเท่ากันพิจารณาได้จาก $\angle BOC + \angle COA = 180^\circ$ และ $\angle COA + \angle AOD = 180^\circ$ เมื่อลบมุม COA ที่มีร่วมกันจึงได้ $\angle BOC = \angle AOD$

ตัวอย่าง 3 เส้นตรง AB และ CD ตัดกันที่ O ถ้า $\angle BOC = (3x + 12)^\circ$ และ $\angle AOD = (5x - 18)^\circ$ จงหา x และขนาดมุม BOC

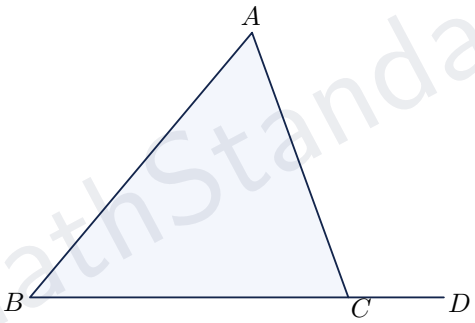
วิธีคิด มุมตรงข้ามเท่ากัน จึงได้ $3x + 12 = 5x - 18$ ดังนั้น $2x = 30$ และ $x = 15$ แทนค่ากลับได้ $\angle BOC = 3(15) + 12 = 57^\circ$

ตอบ $x = 15$ และ $\angle BOC = 57^\circ$

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.4 มุมภายในและมุมภายนอกของสามเหลี่ยม

มุมภายในทั้งสามของสามเหลี่ยมมีผลรวม 180° หากต่อด้านหนึ่งออกไป มุมที่เกิดระหว่างส่วนต่อกับด้านข้างเรียกว่า **มุมภายนอก** ซึ่งประชิดกับมุมภายในที่จุดยอดเดียวกัน



ต่อ BC ผ่าน C ถึง D จะได้มุมภายนอก ACD

มุมของสามเหลี่ยม

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$$

$$\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$$

สูตรมุมภายนอกใช้ผลบวกของมุมภายในสองมุมที่ไม่ประชิดกับมุมภายนอกนั้น

จาก $\angle ACD = 180^\circ - \angle ACB$ และ $\angle BAC + \angle ABC = 180^\circ - \angle ACB$ จึงได้สูตรมุมภายนอกข้างต้นหลักเดียวกันนี้ใช้ได้เมื่อหมุนหรือเปลี่ยนตำแหน่งของรูป

ตัวอย่าง 4 สามเหลี่ยม ABC มี $\angle BAC = 57^\circ$ และ $\angle ABC = 68^\circ$ ต่อ BC ผ่าน C ถึง D จงหา $\angle ACB$ และ $\angle ACD$

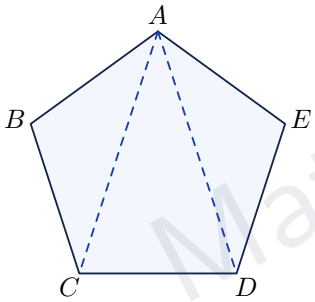
วิธีคิด มุมภายในที่เหลือเท่ากับ $180^\circ - 57^\circ - 68^\circ = 55^\circ$ ส่วนมุมภายนอก $ACD = 57^\circ + 68^\circ = 125^\circ$ ซึ่งรวมกับมุม ACB ได้ 180°

ตอบ $\angle ACB = 55^\circ$ และ $\angle ACD = 125^\circ$

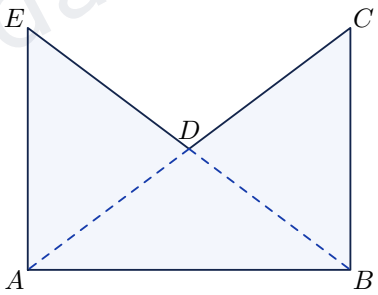
MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.5 ผลรวมมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยม

รูปหลายเหลี่ยมอย่างง่าย มี ขอบ ไม่ ตัด กันเอง ยกเว้น ด้าน ที่ ประชิด กัน พบ กัน ที่ จุดยอด ร่วม รูปหลายเหลี่ยมนูนมีมุมภายในทุกมุมน้อยกว่า 180° ส่วนรูปหลายเหลี่ยมเว้ามีมุมภายในบางมุมมากกว่า 180°



รูปห้าเหลี่ยมนูน



รูปห้าเหลี่ยมเว้า

ผลรวมมุมภายใน: ใช้ได้ทั้งรูปนูนและรูปเว้า

ให้ n เป็นจำนวนด้านของรูปหลายเหลี่ยมอย่างง่าย โดย $n \geq 3$ แล้ว

$$\text{ผลรวมมุมภายใน} = 180^\circ \times (n-2)$$

สำหรับรูปเว้า ต้องนับมุมภายในที่จุดเว้าเป็นมุมกลับด้วย

รูปหลายเหลี่ยมอย่างง่ายแบ่งเป็นสามเหลี่ยมที่ไม่ทับซ้อนกันได้ $n-2$ รูป จึงมีผลรวมมุมเท่ากับ 180° จำนวน $n-2$ ชุด ในรูปห้าเหลี่ยมทั้งสองข้างต้นแบ่งได้รูปละ 3 สามเหลี่ยม จึงมีผลรวมมุมภายในเท่ากันคือ 540° สำหรับรูปเว้า ต้องเลือกเส้นทแยงมุมที่อยู่ภายในรูป

ตัวอย่าง 5 รูปห้าเหลี่ยมเว้ามีมุมภายในสี่มุมเท่ากับ $80^\circ, 90^\circ, 70^\circ, 220^\circ$ จงหามุมภายในที่เหลือ

วิธีคิด ผลรวมมุมภายในเท่ากับ $180^\circ(5-2) = 540^\circ$ จึงได้มุมที่เหลือ

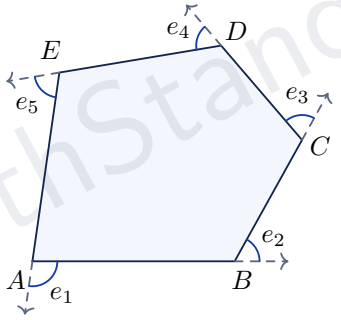
$$540^\circ - (80^\circ + 90^\circ + 70^\circ + 220^\circ) = 80^\circ$$

ตอบ 80°

MathStandard
MathStandard
MathStandard

ผลรวมมุมภายนอกของรูปหลายเหลี่ยมนูน

มุมภายนอกที่จุดยอดหนึ่งเป็นมุมระหว่างส่วนต่อของด้านที่เข้าสู่จุดยอดกับด้านถัดไป โดยเลือกต่อด้านตามลำดับการเดินรอบรูปในทิศทางเดียวกันทุกจุดยอด เช่น ต่อ AB ผ่าน B แล้วต่อ BC ผ่าน C ต่อเนื่องจนครบรอบ



ลูกศรแสดงการต่อด้านในทิศทางเดียวกัน และ $e_1, \ldots, e_5$ คือขนาดมุมภายนอก

ผลรวมมุมภายนอกของรูปหลายเหลี่ยมนูน

ถ้าเลือกมุมภายนอกหนึ่งมุมที่แต่ละจุดยอดตามทิศทางข้างต้น จะได้

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 360^\circ$$

รูปหลายเหลี่ยมนูนที่มีมุมเท่ากันทุกมุมมีมุมภายนอกมุมละ $\dfrac{360^\circ}{n}$

เมื่อเดินตามขอบรูปครบหนึ่งรอบ ทิศทางจะหมุนครบ 360° จึงได้ผลรวมข้างต้น มุมภายในกับมุมภายนอกที่ประชิดกันรวมกันเป็น 180° การหาร 360° ด้วยจำนวนด้านเพื่อหามุมแต่ละมุม ใช้เมื่อมุมภายนอกทุกมุมเท่ากันเท่านั้น

ตัวอย่าง 6 รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีมุมภายนอกมุมละ 24° จงหาจำนวนด้านและขนาดมุมภายในแต่ละมุม

วิธีคิด ให้ n เป็นจำนวนด้าน จาก $24n = 360$ ได้ $n = 15$ มุมภายในประชิดกับมุมภายนอกจึงมีขนาด $180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$

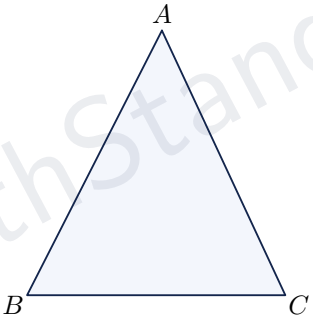
ตอบ 15 ด้าน และมุมภายในมุมละ 156°

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต | ตอนที่ 1

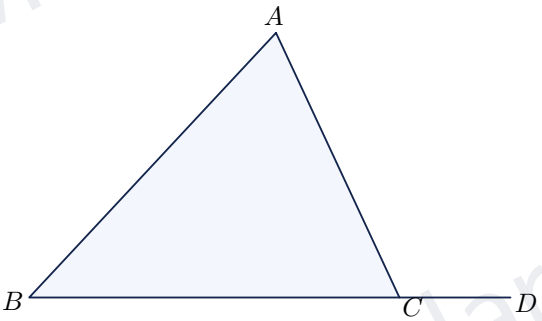
แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 แผ่นป้ายรูปสามเหลี่ยม ABC มี $\angle BAC = 52^\circ$ และ $\angle ABC = 63^\circ$ จงหา $\angle ACB$



ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 สามเหลี่ยม ABC มีมุมที่ A และ B เท่ากับ 68° และ 47° ตามลำดับ ต่อ BC ผ่าน C ถึง D จงหา $\angle ACD$



ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 มุมสองมุมประชิดกันบนเส้นตรง ถ้ามุมหนึ่งมีขนาด 47° จงหาขนาดอีกมุม

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 จงหาผลรวมมุมภายในของรูปเก้าเหลี่ยมอย่างง่าย พร้อมระบุว่าสูตรนี้ใช้กับรูปเว้าได้หรือไม่

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	$65°$
2	$115°$
3	$133°$
4	$1{,}260°$ และใช้ได้กับรูปเว้า
5	13 ด้าน
6	$90°$
7	$130°$
8	$128°$
9	$36°$ และ 10 ด้าน
10	$10°$
11	$40°$
12	$108°$
13	$34°$
14	$48°$
15	$80°, 60°, 40°$ ตามลำดับ
16	$162°$
17	$64°$
18	$68°$
19	20 เซนติเมตร
20	$36°$

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 มุมพื้นฐานและการหาขนาดของมุม

ข้อ 1 ผลรวมมุมภายในสามเหลี่ยมเท่ากับ 180° จึงได้ $\angle ACB = 180^\circ - 52^\circ - 63^\circ = 65^\circ$

ตอบ 65°

ข้อ 2 มุมภายนอกเท่ากับผลบวกของมุมภายในสองมุมที่ไม่ประชิดกัน ดังนั้น $\angle ACD = 68^\circ + 47^\circ = 115^\circ$

ตอบ 115°

ข้อ 3 ผลบวกของมุมประชิดบนเส้นตรงเท่ากับ 180° จึงได้ $180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$

ตอบ 133°

ข้อ 4 ให้ $n = 9$ เป็นจำนวนด้าน จะได้ $180^\circ(n-2) = 180^\circ(7) = 1{,}260^\circ$ สูตรนี้ใช้กับรูปหลายเหลี่ยมอย่างง่ายทั้งนูนและเว้า โดยนับมุมกลับที่จุดเว้าเป็นมุมภายใน

ตอบ $1{,}260^\circ$ และใช้ได้กับรูปเว้า

ข้อ 5 ให้ n แทนจำนวนด้าน จะได้ $180(n-2) = 1{,}980$ ดังนั้น $n - 2 = 11$ และ $n = 13$

ตอบ 13 ด้าน

ข้อ 6 ผลรวมมุมภายนอกเท่ากับ 360° จำนวนส่วนรวมคือ $2+3+4+5+6 = 20$ มุมที่ต้องการจึงเท่ากับ $\frac{5}{20}(360^\circ) = 90^\circ$

ตอบ 90°

ข้อ 7 วัดมุมตามเข็มนาฬิกาจากเลข 12 เข็มชั่วโมงอยู่ที่ $30(8) + \frac{1}{2}(20) = 250^\circ$ ส่วนเข็มนาทีอยู่ที่ $6(20) = 120^\circ$ ผลต่างเท่ากับ 130° ซึ่งน้อยกว่า 180°

ตอบ 130°

ข้อ 8 มุม IAB และ IBA เป็นครึ่งหนึ่งของมุม A, B ตามลำดับ จึงได้ $\angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C = 90^\circ + 38^\circ = 128^\circ$

ตอบ 128°

ข้อ 9 มุมภายนอกที่ประชิดกันเท่ากับ $180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$ ให้ n เป็นจำนวนด้าน จาก $36n = 360$ จึงได้ $n = 10$

ตอบ 36° และ 10 ด้าน

ข้อ 10 วัดจากเลข 12 ตามเข็มนาฬิกา เข็มชั่วโมงอยู่ที่ $30(7) + \dfrac{40}{2} = 230^\circ$ เข็มนาทีอยู่ที่ $6(40) = 240^\circ$ จึงต่างกัน 10°

ตอบ 10°