MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม

www.mathstandard.com

เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม ครอบคลุม ส่วนประกอบของวงกลม มุมและส่วนโค้ง คอร์ด เส้นตัด เส้นสัมผัส วงกลมที่สัมพันธ์กับสามเหลี่ยม พื้นที่ และรูปหลายเหลี่ยมแนบในวงกลม เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ มุม สามเหลี่ยม ความเท่ากันทุกประการ ความคล้าย ทฤษฎีบทพีทาโกรัส พื้นที่ อัตราส่วนตรีโกณมิติ และสมการ

ขอบเขตและข้อตกลง

- ใช้อักษรพิมพ์ใหญ่แทนชื่อจุด และใช้ AB แทนความยาวส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ เมื่อปรากฏในสมการ
- ในสามเหลี่ยม ABC เมื่อใช้ด้าน a, b, c ให้ $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ ซึ่งอยู่ตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ
- ใช้ Area หรือ A แทนพื้นที่ตามบริบท ใช้ r, R แทนรัศมีโดยระบุความหมายในแต่ละหัวข้อหรือตัวอย่าง เมื่อมีหลายวงต้องแยกรัศมีและศูนย์กลางให้ชัดเจน
- ขนาดส่วนโค้งวัดเป็นองศา ความยาวส่วนโค้งวัดเป็นหน่วยความยาว ต้องเลือกส่วนโค้งเล็กหรือใหญ่ให้สอดคล้องกับมุมที่พิจารณา
- รูปประกอบแสดงตำแหน่งและความสัมพันธ์ ไม่ใช้การวัดจากรูปแทนข้อมูลและเหตุผล ความยาวเป็นบวก และหน่วยที่ใช้ต้องสอดคล้องกัน
- ตอบด้วยค่าที่แน่นอน เช่น π หรือกรณฑ์ เว้นแต่โจทย์กำหนดให้ประมาณค่า

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม

สารบัญ

ตอนที่ 1 วงกลมและมุมพื้นฐาน

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–16 11

ตอนที่ 2 มุมจากคอร์ด เส้นตัด และเส้นสัมผัส

เนื้อหาและตัวอย่าง 21

แบบฝึกหัดข้อ 17–32 26

ตอนที่ 3 คอร์ดและความสัมพันธ์ของความยาว

เนื้อหาและตัวอย่าง 37

แบบฝึกหัดข้อ 33–48 43

ตอนที่ 4 เส้นสัมผัสและวงกลมที่สัมผัสกัน

เนื้อหาและตัวอย่าง 53

แบบฝึกหัดข้อ 49–64 59

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 วงกลมแนบใน แนบนอก และล้อมรอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง 69

แบบฝึกหัดข้อ 65–80 77

ตอนที่ 6 พื้นที่และความยาวรอบรูปที่มีส่วนโค้ง

เนื้อหาและตัวอย่าง 88

แบบฝึกหัดข้อ 81–96 95

ตอนที่ 7 รูปหลายเหลี่ยมในวงกลมและการประยุกต์

เนื้อหาและตัวอย่าง 106

แบบฝึกหัดข้อ 97–112 113

สรุปเนื้อหา เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม 123

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 113–132 131

เฉลยคำตอบ 141

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 147

MathStandard
MathStandard
MathStandard

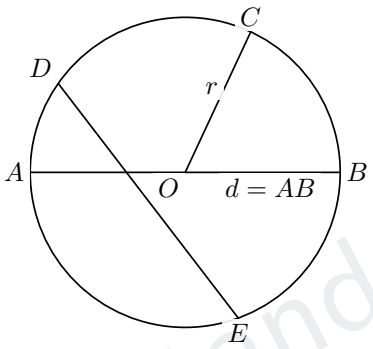
เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

วงกลมและมุมพื้นฐาน

1.1 วงกลมและส่วนประกอบ

วงกลม เป็น เซต ของ จุด บน ระนาบ ที่ อยู่ ห่าง จาก จุด คงที่ จุด หนึ่ง เป็น ระยะ เท่ากัน จุด คงที่ นั้น เรียก ว่า **จุดศูนย์กลาง** และระยะดังกล่าวเรียกว่า **รัศมี**

คอร์ดเป็นส่วนของเส้นตรงที่ปลายทั้งสองอยู่บนวงกลม คอร์ดที่ผ่านศูนย์กลางเรียกว่าเส้นผ่านศูนย์กลาง ปลายคอร์ดแบ่งเส้นรอบวงเป็นสองส่วนโค้ง หากคอร์ดไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง จะเรียกส่วนที่สั้นกว่าว่าส่วนโค้งเล็ก และส่วนที่ยาวกว่าว่าส่วนโค้งใหญ่



ปริมาณพื้นฐาน

ให้ r เป็นรัศมี d เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง C เป็นความยาวเส้นรอบวง และ Area เป็นพื้นที่ภายในวงกลม

$$d = 2r, \qquad C = 2\pi r, \qquad \text{Area} = \pi r^2$$

ตัวอย่าง 1 แผ่นวงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 เซนติเมตร จงหาเส้นรอบวงและพื้นที่

วิธีคิด รัศมีเท่ากับ $\frac{10}{2} = 5$ เซนติเมตร จึงมีเส้นรอบวง $2\pi(5) = 10\pi$ เซนติเมตร และพื้นที่ $\pi 5^2 = 25\pi$ ตารางเซนติเมตร

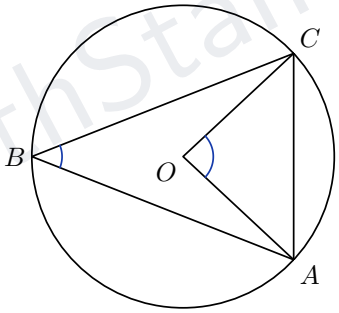
ตอบ เส้นรอบวง 10π เซนติเมตร และพื้นที่ 25π ตารางเซนติเมตร

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.2 มุมที่ศูนย์กลางและมุมบนเส้นรอบวง

มุมที่ศูนย์กลางมีจุดยอดอยู่ที่ศูนย์กลางของวงกลม ส่วนมุมบนเส้นรอบวงมีจุดยอดอยู่บนวงกลมและแขนทั้งสองผ่านปลายส่วนโค้ง ความสัมพันธ์ระหว่างมุมทั้งสองพิจารณาจากส่วนโค้งเดียวกัน

ในรูป A, C เป็นปลายส่วนโค้ง และ B อยู่บนส่วนโค้งใหญ่อีกด้านหนึ่ง มุม ABC จึงรองรับส่วนโค้ง AC ที่ไม่ผ่าน B



ทฤษฎีบทมุมที่รองรับส่วนโค้งเดียวกัน

ให้ O เป็นศูนย์กลาง และ A, B, C เป็นจุดต่างกันบนวงกลม เมื่อมุม AOC กับมุม ABC รองรับส่วนโค้ง AC เดียวกัน

$$\angle AOC = 2\angle ABC$$

ในกรณีนี้เลือกมุมที่ศูนย์กลางให้ตรงกับส่วนโค้งที่พิจารณา

ตัวอย่าง 2 มุมบนเส้นรอบวงรองรับส่วนโค้งขนาด 86° จงหาขนาดมุมนั้น

วิธีคิด ขนาดส่วนโค้งเท่ากับขนาดมุมที่ศูนย์กลางซึ่งรองรับส่วนโค้งนั้น ดังนั้นมุมบนเส้นรอบวงมีขนาด $\frac{86^\circ}{2} = 43^\circ$

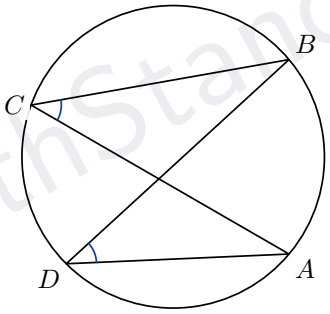
ตอบ 43°

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.3 มุมที่เท่ากันและมุมกลับ

มุมบนเส้นรอบวงที่รองรับส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน แม้มีจุดยอดต่างกัน

เมื่อจุดยอดของมุมอยู่บนส่วนโค้งเล็ก มุมนั้นรองรับส่วนโค้งใหญ่ ดังนั้นมุมที่ศูนย์กลางซึ่งสัมพันธ์กันเป็นมุมกลับที่มีขนาดมากกว่า 180°



แยกส่วนโค้งที่รองรับมุม

เมื่อ C, D อยู่บนส่วนโค้งด้านเดียวกันของคอร์ด AB และเป็นจุดต่างจาก A, B

$$\angle ACB = \angle ADB$$

ถ้ามุมบนเส้นรอบวงมีขนาด α องศา ส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้นมีขนาด 2α องศา

ตัวอย่าง 3 มุมบนเส้นรอบวงเท่ากับ 126° จงหามุมที่ศูนย์กลางทั้งมุมกลับที่สอดคล้องกันและมุมเล็ก

วิธีคิด มุมกลับเท่ากับ $2(126^\circ) = 252^\circ$ มุมทั้งสองรอบศูนย์กลางรวม 360° จึงได้มุมเล็ก

$360^\circ - 252^\circ = 108^\circ$

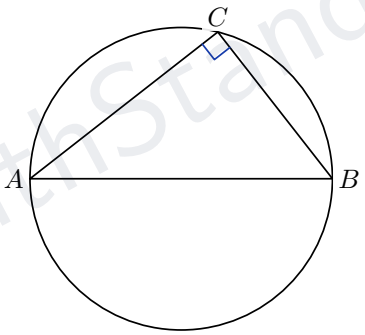
ตอบ มุมกลับ 252° และมุมเล็ก 108°

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.4 มุมในครึ่งวงกลม

เส้นผ่านศูนย์กลาง แบ่ง วงกลม เป็น ส่วนโค้ง สอง ส่วน ที่ มี ขนาด ส่วน ละ 180° มุมบนเส้นรอบวง ที่ รองรับเส้นผ่านศูนย์กลางจึงมีขนาดครึ่งหนึ่งของ 180° และเป็นมุมฉาก

สมบัตินี้ทำให้ใช้ผลบวกมุมสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และอัตราส่วนตรีโกณมิติร่วมกับรูปวงกลมได้



เงื่อนไขของมุมฉาก

ถ้า AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ C เป็นจุดอื่นบนวงกลม

$$\angle ACB = 90^\circ, \qquad AC^2 + BC^2 = AB^2$$

ในทางกลับกัน ถ้า $\angle ACB = 90^\circ$ จุด C จะอยู่บนวงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

ตัวอย่าง 4 สามเหลี่ยม ABC อยู่ในวงกลม โดย AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 13 หน่วย และ $AC = 5$ หน่วย จงหา BC

วิธีคิด มุม ACB เป็นมุมฉาก จึงมี $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ เลือกความยาวบวกได้ $BC = 12$

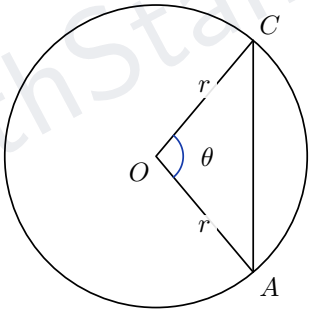
ตอบ 12 หน่วย

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.5 สามเหลี่ยมที่มีด้านเป็นรัศมี

รัศมีที่เชื่อมศูนย์กลางกับปลายคอร์ดเป็นด้านสองด้านของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เนื่องจากรัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน

ในรูป $OA = OC = r$ โดย r เป็นรัศมี และมุมที่ศูนย์กลางมีขนาด θ มุมฐาน OAC, OCA มีขนาดเท่ากัน จึงหาขนาดมุมฐานได้จากผลบวกมุมภายในสามเหลี่ยม



มุมฐานของสามเหลี่ยมรัศมี

ให้ O เป็นศูนย์กลาง A, C อยู่บนวงกลม และ $\theta = \angle AOC$ เป็นมุมภายในสามเหลี่ยมที่น้อยกว่า 180°

$$\angle OAC = \angle OCA = \frac{180^\circ - \theta}{2}$$

ตัวอย่าง 5 ในวงกลมศูนย์กลาง O มี $\angle OAC = 27^\circ$ จงหามุมเล็ก AOC

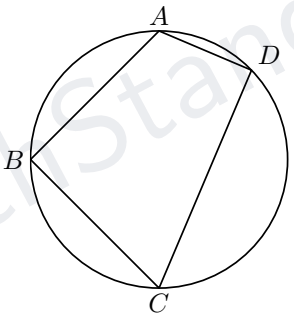
วิธีคิด $OA = OC$ จึงมี $\angle OCA = 27^\circ$ ด้วย ดังนั้น $\angle AOC = 180^\circ - 27^\circ - 27^\circ = 126^\circ$

ตอบ 126°

MathStandard

1.6 สี่เหลี่ยมในวงกลม

สี่เหลี่ยมในวงกลมหมายถึงสี่เหลี่ยมนูนที่จุดยอดทั้งสี่อยู่บนวงกลมเดียวกัน มุมตรงข้ามรองรับส่วนโค้งสองส่วนซึ่งรวมกันเป็นวงกลมเต็ม เมื่อแต่ละมุมเป็นครึ่งหนึ่งของส่วนโค้งที่รองรับ ผลบวกมุมตรงข้ามจึงเป็น 180°



มุมตรงข้ามเป็นมุมเสริมกัน

ให้ A, B, C, D เรียงตามเส้นรอบวงเดียวกัน

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

ในทางกลับกัน สี่เหลี่ยมนูนที่มีผลบวกมุมตรงข้ามเท่ากับ 180° จะมีวงกลมผ่านจุดยอดทั้งสี่

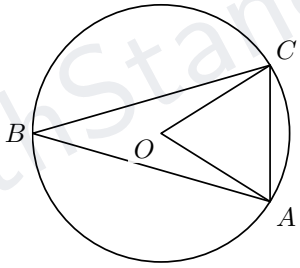
ตัวอย่าง 6 มุมตรงข้ามคู่หนึ่งของสี่เหลี่ยมในวงกลมเป็น $(3x+8)^\circ$ และ $(2x+12)^\circ$ จงหามุมทั้งสอง
วิธีคิด ตั้งสมการ $(3x+8)+(2x+12)=180$ ได้ $5x=160$ และ $x=32$ มุมจึงเป็น 104° และ 76°
ตอบ 104° และ 76°

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม | ตอนที่ 1

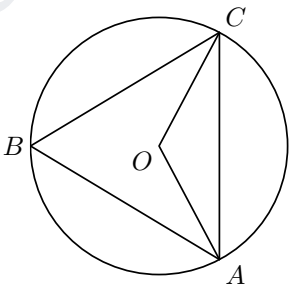
แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 จุด A, B, C อยู่บนวงกลมศูนย์กลาง O โดย B อยู่บนส่วนโค้งใหญ่ AC และ $\angle ABC = 32^\circ$ จงหามุม AOC ที่รองรับส่วนโค้งเล็ก AC



ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 ในวงกลมศูนย์กลาง O มี $\angle AOC = 124^\circ$ และ B อยู่บนส่วนโค้งใหญ่ AC จงหา $\angle ABC$



ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 วงกลมมีรัศมี 7 เซนติเมตร จงหาเส้นรอบวงและพื้นที่ภายในวงกลม

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 มุมบนเส้นรอบวงรองรับส่วนโค้งขนาด 138° จงหาขนาดมุมนั้น

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	64 องศา
2	62 องศา
3	14π เซนติเมตร และ 49π ตารางเซนติเมตร
4	$69°$
5	52 องศา
6	32 องศา
7	236 องศา
8	40 องศา
9	7π เซนติเมตร
10	68 องศา
11	$108°$
12	80 องศา
13	35 องศา
14	$x = 29$ มุม $68°$ และ $112°$
15	มุมกลับ $220°$ และมุมเล็ก $140°$
16	6π เมตร
17	47 องศา
18	$67°$
19	22
20	116 องศา
21	88 องศา

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 วงกลมและมุมพื้นฐาน

ข้อ 1 มุมที่ศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมบนเส้นรอบวงที่รองรับส่วนโค้งเดียวกัน จึงได้ $\angle AOC = 2(32^\circ) = 64^\circ$

ตอบ 64 องศา

ข้อ 2 มุม ABC รองรับส่วนโค้งเล็ก AC จึงมีขนาด $\frac{124^\circ}{2} = 62^\circ$

ตอบ 62 องศา

ข้อ 3 ให้รัศมี $r = 7$ เส้นรอบวงเป็น $2\pi r = 14\pi$ และพื้นที่เป็น $\pi r^2 = 49\pi$

ตอบ 14π เซนติเมตร และ 49π ตารางเซนติเมตร

ข้อ 4 มุมบนเส้นรอบวงมีขนาดครึ่งหนึ่งของส่วนโค้งที่รองรับ จึงมีขนาด $\frac{138^\circ}{2} = 69^\circ$

ตอบ 69°

ข้อ 5 เพราะ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จึงมี $\angle ACB = 90^\circ$ ผลบวกมุมสามเหลี่ยมให้ $\angle CBA = 180^\circ - 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$

ตอบ 52 องศา

ข้อ 6 $OA = OC$ เป็นรัศมี จึงมีมุมฐานเท่ากัน มุมฐานแต่ละมุมคือ $\frac{180^\circ - 116^\circ}{2} = 32^\circ$

ตอบ 32 องศา

ข้อ 7 มุม ABC รองรับส่วนโค้งที่ไม่ผ่าน B ซึ่งเป็นส่วนโค้งใหญ่ มุมกลับที่ศูนย์กลางจึงเป็น $2(118^\circ) = 236^\circ$

ตอบ 236 องศา

ข้อ 8 ส่วนโค้งเล็กมีขนาด $\frac{2}{2+7}(360^\circ) = 80^\circ$ มุมที่ B รองรับส่วนโค้งนี้ จึงมีขนาด 40°

ตอบ 40 องศา

ข้อ 9 มุมที่ศูนย์กลางซึ่งรองรับส่วนโค้งเดียวกันเท่ากับ 84° ความยาวส่วนโค้งคือ $\frac{84}{360}(2\pi)(15) = 7\pi$

ตอบ 7π เซนติเมตร

ข้อ 10 ผลบวกมุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมในวงกลมเป็น 180° จึงได้ $\angle BCD = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$

ตอบ 68 องศา

ข้อ 11 เพราะ $OA = OB$ สามเหลี่ยม OAB จึงเป็นหน้าจั่ว ได้ $\angle OBA = 36^\circ$ ดังนั้น $\angle AOB = 180^\circ - 2(36^\circ) = 108^\circ$

ตอบ 108°