MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ และความคล้าย

www.mathstandard.com

เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและความคล้าย

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง ความเท่ากันทุกประการและความคล้าย ครอบคลุม เงื่อนไขความเท่ากันทุกประการและความคล้าย การจับคู่ส่วนที่สมนัยกัน อัตราส่วนความยาว พื้นที่ และปริมาตร ตลอดจนการแบ่งส่วนของรูปเรขาคณิต เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ มุม เส้นขนาน อัตราส่วน สมการ พื้นที่ และทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ขอบเขตและข้อตกลง

- ลำดับจุดยอดในสัญลักษณ์ $\cong$ และ $\sim$ กำหนดคู่สมนัย ในสามเหลี่ยม ABC ใช้ $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ แทนด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ
- อัตราขยาย $k > 0$ ต้องระบุทิศทางจากรูปใดไปยังรูปใด เมื่อสลับทิศใช้อัตราขยาย $\frac{1}{k}$ ความยาวและตัวส่วนของอัตราส่วนเป็นบวก
- ใช้ Area แทนพื้นที่ S แทนพื้นที่ผิว และ V แทนปริมาตร โดยระบุความหมายของตัวแปรในหัวข้อหรือตัวอย่างที่เกี่ยวข้อง
- การพิสูจน์ระบุสามเหลี่ยม ข้อมูลเท่ากันหรือเป็นสัดส่วน และเกณฑ์ที่ใช้ก่อนสรุปส่วนคู่สมนัย ไม่อนุมานจากการวัดรูปหรือรูปร่างที่มองเห็น
- รูปสามมิติคล้ายกันต้องใช้อัตราขยายเดียวกันทุกมิติ พื้นที่และพื้นที่ผิวเปลี่ยนตาม k^2 ปริมาตรเปลี่ยนตาม k^3 ใช้หน่วยให้สอดคล้องกัน

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและความคล้าย

สารบัญ

ตอนที่ 1 ความเท่ากันทุกประการและการให้เหตุผล

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–20 12

ตอนที่ 2 ความคล้ายและอัตราส่วนความยาว

เนื้อหาและตัวอย่าง 27

แบบฝึกหัดข้อ 21–36 35

ตอนที่ 3 เส้นขนาน จุดกึ่งกลาง และเส้นมัธยฐาน

เนื้อหาและตัวอย่าง 44

แบบฝึกหัดข้อ 37–52 51

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและความคล้าย

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 4 สี่เหลี่ยมพิเศษและเส้นทแยงมุม

เนื้อหาและตัวอย่าง 60

แบบฝึกหัดข้อ 53–68 67

ตอนที่ 5 เส้นแบ่งครึ่งมุมและการแบ่งส่วน

เนื้อหาและตัวอย่าง 77

แบบฝึกหัดข้อ 69–84 88

ตอนที่ 6 พื้นที่ ปริมาตร และความยาวรอบรูป

เนื้อหาและตัวอย่าง 100

แบบฝึกหัดข้อ 85–108 114

สรุปเนื้อหา เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและความคล้าย 130

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 109–128 137

เฉลยคำตอบ 147

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 153

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

ความเท่ากันทุกประการและการให้เหตุผล

1.1 ความหมายและส่วนสมนัย

รูปเรขาคณิตสองรูป**เท่ากันทุกประการ** เมื่อสามารถเลื่อน หมุน หรือสะท้อนรูปหนึ่งให้ทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท โดยไม่ยืดหรือหดรูป ทั้งรูปร่างและขนาดจึงคงเดิม ส่วนของเส้นตรงคู่สมนัยยาวเท่ากัน และมุมคู่สมนัยมีขนาดเท่ากัน



ตำแหน่งและทิศทางของรูปอาจต่างกัน แต่ลำดับชื่อจุดยอดกำหนดคู่สมนัย

การอ่านสัญลักษณ์ความเท่ากันทุกประการ

เมื่อ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ มีการจับคู่ดังนี้

$$A \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow E, \quad C \leftrightarrow F$$

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad CA = FD$$

$$\angle BAC = \angle EDF, \quad \angle ABC = \angle DEF, \quad \angle ACB = \angle DFE$$

การจับคู่ต้องรักษาลำดับเดียวกันทั้งด้านและมุม ไม่จับคู่จากตำแหน่งซ้าย ขวา บน หรือล่างของภาพเพียงอย่างเดียว

การเขียนเหตุผลและข้อจำกัดของเกณฑ์

ระบุชื่อสามเหลี่ยมและลำดับจุดคู่สมนัย แสดงด้านหรือมุมที่เท่ากันพร้อมเหตุผล แล้วระบุเกณฑ์ที่ใช้ก่อนสรุปส่วนคู่สมนัย

มุมเท่ากันสามคู่ให้เพียงความคล้าย ส่วนด้านสองคู่กับมุมที่ไม่อยู่ระหว่างด้านนั้น ไม่เพียงพอสำหรับความเท่ากันทุกประการโดยทั่วไป

ตัวอย่าง 1 กำหนด $\triangle PQR \cong \triangle XZY$ ถ้า $PR = 17$ หน่วย และ $\angle PQR = 58^\circ$ จงหา XY และ $\angle XZY$

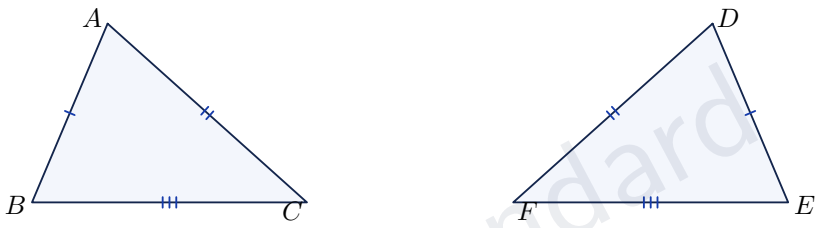
วิธีคิด อ่านลำดับได้ $P \leftrightarrow X, Q \leftrightarrow Z, R \leftrightarrow Y$ ดังนั้น PR สมนัยกับ XY และมุมที่ Q สมนัยกับมุมที่ Z จึงได้ $XY = 17$ หน่วย และ $\angle XZY = 58^\circ$

ตอบ $XY = 17$ หน่วย และ $\angle XZY = 58^\circ$

1.2 เกณฑ์ด้าน–ด้าน–ด้าน

การพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการไม่จำเป็นต้องตรวจทั้งหกคู่เสมอไป เกณฑ์แต่ละแบบระบุข้อมูลที่เพียงพอในการกำหนดรูปร่างและขนาดของสามเหลี่ยม

> **ด้าน–ด้าน–ด้าน หรือ ด.ด.ด.**
> ถ้าด้านสามคู่ของสามเหลี่ยมสองรูปยาวเท่ากันตามคู่สมนัย แล้วสามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากันทุกประการ

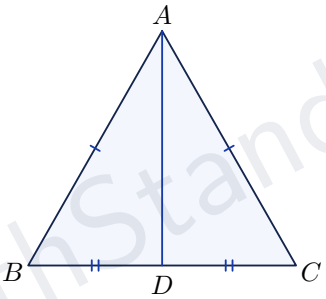


เครื่องหมายขีดจำนวนเท่ากันใช้ระบุด้านที่ยาวเท่ากัน

เมื่อใช้ด้านร่วม ต้องเขียนให้ชัดว่าด้านนั้นเป็นด้านเดียวกันของสามเหลี่ยมทั้งสองรูป ส่วนข้อความว่าเป็นจุดกึ่งกลางให้ความเท่ากันของส่วนของเส้นตรงสองส่วน

ตัวอย่าง 2 สามเหลี่ยม ABC มี $AB = AC$ และ D เป็นจุดกึ่งกลางของ BC จงพิสูจน์ว่า AD แบ่งครึ่งมุม BAC

วิธีคิด



พิจารณา $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$ มี $AB = AC$ ตามกำหนด $BD = CD$ จากความเป็นจุดกึ่งกลาง และ $AD = AD$ เป็นด้านร่วม จึงได้ $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ ตามเกณฑ์ ด.ด.ด. มุมคู่สมนัยให้ $\angle BAD = \angle CAD$

ตอบ AD แบ่งครึ่งมุม BAC

1.3 เกณฑ์ด้าน–มุม–ด้าน

ด้าน–มุม–ด้าน หรือ ด.ม.ด.
ถ้าด้านสองคู่ยาวเท่ากัน และ**มุมระหว่างด้านคู่นั้น** มีขนาดเท่ากัน แล้วสามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากันทุกประการ

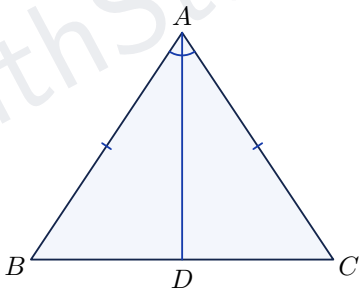


มุมที่ใช้ต้องอยู่ระหว่างด้านสองด้านที่ทราบว่าเท่ากัน

เงื่อนไขด้านสองคู่กับมุมที่ไม่ได้อยู่ระหว่างด้านอาจให้รูปสามเหลี่ยมได้มากกว่าหนึ่งแบบ จึงไม่ใช้เป็นเกณฑ์ทั่วไปแทน ด.ม.ด.

ตัวอย่าง 3 ในสามเหลี่ยม ABC มี $AB = AC$ และจุด D อยู่บน BC โดย $\angle BAD = \angle CAD$ ถ้า $BD = 2x + 1$ และ $DC = 11$ หน่วย จงหา x

วิธีคิด



พิจารณา $\triangle BAD$ และ $\triangle CAD$ มี $BA = CA$, มุม $BAD = CAD$ และ AD เป็นด้านร่วม มุมที่เท่ากันอยู่ระหว่างด้านที่ใช้ จึงเท่ากันทุกประการแบบ ด.ม.ด. ได้ $BD = DC$ ดังนั้น

$$2x + 1 = 11 \quad \Longrightarrow \quad x = 5$$

ตอบ 5

1.4 เกณฑ์มุม–ด้าน–มุม และมุม–มุม–ด้าน

สองเกณฑ์ที่ใช้มุมสองคู่

มุม–ด้าน–มุม หรือ ม.ด.ม. มุมสองคู่เท่ากัน และด้านที่อยู่ระหว่างมุมทั้งสองยาวเท่ากัน

มุม–มุม–ด้าน หรือ ม.ม.ด. มุมสองคู่เท่ากัน และด้านคู่สมนัยหนึ่งคู่ที่ไม่ใช่ด้านระหว่างมุมที่กำหนดยาวเท่ากัน

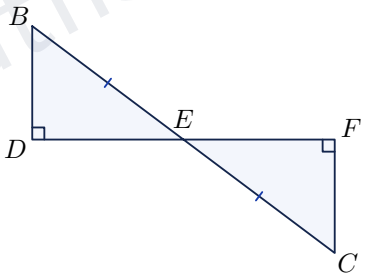
ผลรวมมุมภายในสามเหลี่ยมเป็น 180° เมื่อทราบว่ามุมสองคู่เท่ากัน มุมคู่ที่สามย่อมเท่ากันด้วย จึงเปลี่ยนการพิจารณา ม.ม.ด. ไปเป็น ม.ด.ม. ได้



ในภาพ ด้านที่ทำเครื่องหมายอยู่ระหว่างมุมสองมุมที่ทำเครื่องหมาย

ตัวอย่าง 4 เส้น BC กับ DF ตัดกันที่ E โดย $BE = CE$ และ $\angle BDE = \angle CFE = 90^\circ$ ถ้า $BD = 7$ หน่วย จงหา CF

วิธีคิด



มุมตรงข้ามให้ $\angle BED = \angle CEF$ ร่วมกับมุมฉากและด้าน $BE = CE$ จึงได้ $\triangle BDE \cong \triangle CFE$ แบบ ม.ม.ด. ดังนั้น $CF = BD = 7$ หน่วย

ตอบ 7 หน่วย

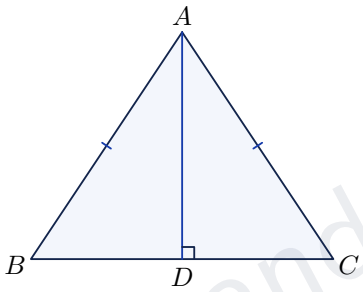
1.5 เกณฑ์ฉาก–ด้าน–ด้าน

ฉาก–ด้าน–ด้าน หรือ ฉ.ด.ด.
สามเหลี่ยมมุมฉาก สอง รูป เท่ากัน ทุกประการ เมื่อ ด้านตรงข้ามมุมฉาก ยาว เท่ากัน และ ด้านประกอบมุมฉากคู่สมนัยหนึ่งคู่ยาวเท่ากัน

ต้องระบุว่าทั้งสองรูปเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และแยกด้านตรงข้ามมุมฉากออกจากด้านประกอบมุมฉากให้ถูกต้อง พีทาโกรัสทำให้ด้านประกอบมุมฉากที่เหลือยาวเท่ากันด้วย จึงสอดคล้องกับเกณฑ์ ด.ด.ด.

ตัวอย่าง 5 สามเหลี่ยม ABC มี $AB = AC = 10$ หน่วย ลาก $AD \perp BC$ โดย $D \in BC$ และ $AD = 8$ หน่วย จงหา BD และ DC

วิธีคิด



$\triangle ADB$ และ $\triangle ADC$ มีมุมฉากที่ D มี $AB = AC$ เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก และ AD เป็นด้านประกอบมุมฉากร่วม จึงเท่ากันทุกประการแบบ ฉ.ด.ด. ได้ $BD = DC$ ใช้พีทาโกรัสใน $\triangle ADB$

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = 10^2 - 8^2 = 36$$

ความยาวเป็นบวก จึงได้ $BD = 6$ และ $DC = 6$ หน่วย

ตอบ $BD = DC = 6$ หน่วย

การมีมุมเท่ากันสามคู่บอกได้ว่าสามเหลี่ยมคล้ายกัน แต่ยังไม่รับรองว่าขนาดเท่ากัน

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.6 ความยาวรอบรูปและพื้นที่

รูปที่เท่ากันทุกประการมีด้านคู่สมนัยยาวเท่ากันทุกคู่ ผลบวกความยาวขอบรูปจึงเท่ากัน และเมื่อทับกันได้สนิท พื้นที่ย่อมเท่ากันด้วย อย่างไรก็ตาม การมีความยาวรอบรูปเท่ากันหรือพื้นที่เท่ากันเพียงอย่างเดียวไม่เพียงพอที่จะสรุปว่ารูปเท่ากันทุกประการ

ความสัมพันธ์ที่คงเดิม

เมื่อรูปสองรูปเท่ากันทุกประการ ความยาวรอบรูปและพื้นที่ของทั้งสองรูปเท่ากัน

สำหรับสามเหลี่ยม ABC ที่มีฐาน BC และความสูงตั้งฉาก h

$$P = AB + BC + CA, \qquad \text{Area}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}(BC)h$$

P แทนความยาวรอบรูป และ h แทนความสูงที่ตั้งฉากกับฐาน BC

ตัวอย่าง 6 กำหนด $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ถ้า $AB = 5$, $BC = 7$ และ $DF = 8$ เซนติเมตร จงหาความยาวรอบรูปของ DEF

วิธีคิด จากคู่สมนัยได้ $DE = 5$, $EF = 7$ และ $FD = 8$ เซนติเมตร จึงมีความยาวรอบรูป $5 + 7 + 8 = 20$ เซนติเมตร

ตอบ 20 เซนติเมตร

ตัวอย่าง 7 แผ่นสามเหลี่ยมสองแผ่นเท่ากันทุกประการ แผ่นแรกมีฐานยาว 12 เซนติเมตรและความสูงตั้งฉากกับฐาน 5 เซนติเมตร จงหาพื้นที่รวมของสองแผ่น

วิธีคิด พื้นที่หนึ่งแผ่นคือ $\frac{1}{2}(12)(5) = 30$ ตารางเซนติเมตร พื้นที่รวมจึงเท่ากับ $2(30) = 60$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 60 ตารางเซนติเมตร

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและความคล้าย | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 กำหนด $\triangle ABC \cong \triangle FDE$ จงระบุด้านที่สมนัยกับ AB และมุมที่สมนัยกับ $\angle ACB$

ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 แม่แบบสามเหลี่ยม ABC และชิ้นงานสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ โดย $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ถ้า $AB = 3x + 7$ และ $DE = 43$ มิลลิเมตร จงหา x

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและความคล้าย | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 กำหนด $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$ ถ้า $\angle PQR = 68^\circ$ และ $\angle XYZ = (4x + 12)^\circ$ จงหา x

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 แผ่นสามเหลี่ยม ABC และ DEF เท่ากันทุกประการ โดย $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ มี $AB = 13$, $EF = 14$ และ $AC = 15$ เซนติเมตร จงหาความยาวรอบรูปของแผ่น DEF

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและความคล้าย

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	FD และ $\angle FED$
2	12
3	14
4	42 เซนติเมตร
5	11 หน่วย และ $54°$
6	9
7	$\angle BAD = \angle CAD$ โดย ด้าน–ด้าน–ด้าน
8	$AB = CD$ โดย มุม–ด้าน–มุม
9	$BD = DC$ โดย ฉาก–ด้าน–ด้าน
10	$61°$
11	99 ตารางเซนติเมตร
12	$64°$
13	$AC = BD$ โดยเกณฑ์ด้าน–มุม–ด้าน
14	เพียงพอ ตามเกณฑ์มุม–ด้าน–มุมหรือมุม–มุม–ด้าน
15	15 หน่วย
16	4
17	4 ตารางเซนติเมตร
18	17
19	$\angle BAC = \angle CAD$ และ $\angle BCA = \angle ACD$
20	120 ตารางเซนติเมตร

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 ความเท่ากันทุกประการและการให้เหตุผล

ข้อ 1 อ่านลำดับจุดยอดได้ $A \leftrightarrow F$, $B \leftrightarrow D$, $C \leftrightarrow E$ จึงจับคู่ $AB \leftrightarrow FD$ และ $\angle ACB \leftrightarrow \angle FED$

ตอบ FD และ $\angle FED$

ข้อ 2 AB สมนัยกับ DE จึงได้ $3x + 7 = 43$ ดังนั้น $3x = 36$ และ $x = 12$

ตอบ 12

ข้อ 3 มุม PQR และ XYZ เป็นมุมคู่สมนัย จึงได้ $4x + 12 = 68$ แก้สมการได้ $x = 14$

ตอบ 14

ข้อ 4 ด้านคู่สมนัยให้ $DE = 13$, $EF = 14$, $FD = 15$ เซนติเมตร ความยาวรอบรูปจึงเท่ากับ $13 + 14 + 15 = 42$ เซนติเมตร

ตอบ 42 เซนติเมตร

ข้อ 5 ลำดับจุดยอดให้ $A \leftrightarrow Q$, $B \leftrightarrow P$, $C \leftrightarrow R$ จึงมี $PQ = AB = 11$ หน่วย และ $\angle QRP = \angle ACB = 54^\circ$

ตอบ 11 หน่วย และ 54°

ข้อ 6 ด้าน PQ สมนัยกับ XY จึงได้ $5x - 4 = 41$ หรือ $5x = 45$ ดังนั้น $x = 9$

ตอบ 9

ข้อ 7 พิจารณา $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$ มี $AB = AC$ ตามกำหนด $BD = CD$ เพราะ D เป็นจุดกึ่งกลาง และ $AD = AD$ เป็นด้านร่วม จึงเท่ากันทุกประการตามเกณฑ์ด้าน–ด้าน–ด้าน มุมคู่สมนัยที่ A จึงเท่ากัน

ตอบ $\angle BAD = \angle CAD$ โดย ด้าน–ด้าน–ด้าน

ข้อ 8 จาก $AB \parallel CD$ ได้ $\angle BAC = \angle DCA$ และจาก $BC \parallel AD$ ได้ $\angle BCA = \angle DAC$ อีกทั้ง AC เป็นด้านร่วม จึงมี $\triangle BAC \cong \triangle DCA$ ตามเกณฑ์มุม–ด้าน–มุม ดังนั้น $AB = CD$

ตอบ $AB = CD$ โดย มุม–ด้าน–มุม

ข้อ 9 $\triangle ADB$ และ $\triangle ADC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่ D มีด้านตรงข้ามมุมฉาก $AB = AC$ และด้านประกอบมุมฉาก AD เป็นด้านร่วม จึงเท่ากันทุกประการตามเกณฑ์ฉาก–ด้าน–ด้าน และได้ $BD = DC$

ตอบ $BD = DC$ โดย ฉาก–ด้าน–ด้าน

ข้อ 10 ได้ $\angle EDF = \angle BAC = 48^\circ$ ผลรวมมุมภายใน $\triangle DEF$ เท่ากับ 180° จึงมี $\angle DFE = 180^\circ - 48^\circ - 71^\circ = 61^\circ$

ตอบ 61°