MathStandard

# เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

## เรื่อง เลขยกกำลัง

www.mathstandard.com

เรื่อง เลขยกกำลัง

# คำชี้แจง

## จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง เลขยกกำลัง ครอบคลุม ความหมายและสมบัติของเลขยกกำลัง การจัดรูป รากของจำนวน การเปรียบเทียบ สัญกรณ์วิทยาศาสตร์ สมการ และรูปแบบการซ้ำของเลขหลักหน่วย เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ จำนวนเต็ม เศษส่วน และลำดับการดำเนินการ

### ขอบเขตและข้อตกลง

- เลขชี้กำลังศูนย์และลบใช้กับฐานที่ไม่เป็นศูนย์ สูตรเลขชี้กำลังเศษส่วนกำหนดฐานเป็นบวก เว้นแต่พิจารณารากอันดับคี่จากนิยามโดยตรง
- $\sqrt{a}$ แทนรากที่สองที่ไม่เป็นลบของ $a \geq 0$ ส่วนคำว่าตัวประกอบหมายถึงตัวประกอบบวก เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น
- สัญกรณ์วิทยาศาสตร์ของจำนวนบวกใช้ $A \times 10^n$ โดย $1 \leq A < 10$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็ม
- คำตอบเศษส่วนเขียนในรูปอย่างต่ำ ปริมาณที่มีหน่วยต้องระบุหน่วย และคำถามที่ต้องการค่าทั้งหมดต้องแสดงการพิจารณาให้ครบทุกกรณี

### ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง เลขยกกำลัง

# สารบัญ

**ตอนที่ 1 ความหมายและเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม**

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–14 7

**ตอนที่ 2 สมบัติของเลขยกกำลัง**

เนื้อหาและตัวอย่าง 15

แบบฝึกหัดข้อ 15–26 18

**ตอนที่ 3 การจัดรูปและการเปลี่ยนฐาน**

เนื้อหาและตัวอย่าง 25

แบบฝึกหัดข้อ 27–38 28

**ตอนที่ 4 รากและเลขชี้กำลังเศษส่วน**

เนื้อหาและตัวอย่าง 34

แบบฝึกหัดข้อ 39–52 38

**ตอนที่ 5 การเปรียบเทียบเลขยกกำลัง**

เนื้อหาและตัวอย่าง 46

แบบฝึกหัดข้อ 53–64 49

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง เลขยกกำลัง

# สารบัญ (ต่อ)

**ตอนที่ 6 สัญกรณ์วิทยาศาสตร์**

เนื้อหาและตัวอย่าง 56

แบบฝึกหัดข้อ 65–76 59

**ตอนที่ 7 สมการและอสมการเลขยกกำลัง**

เนื้อหาและตัวอย่าง 67

แบบฝึกหัดข้อ 77–88 71

**ตอนที่ 8 เลขหลักหน่วยและแบบรูปซ้ำ**

เนื้อหาและตัวอย่าง 78

แบบฝึกหัดข้อ 89–100 82

**ตอนที่ 9 ผลบวกของตัวประกอบ**

เนื้อหาและตัวอย่าง 88

แบบฝึกหัดข้อ 101–112 91

**ตอนที่ 10 การประยุกต์ร่วมกับพีชคณิต**

เนื้อหาและตัวอย่าง 98

แบบฝึกหัดข้อ 113–124 101

สรุปเนื้อหา เรื่อง เลขยกกำลัง 108

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 125–144 114

เฉลยคำตอบ 124

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 131

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

# ความหมายและเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

## 1.1 ฐานและเลขชี้กำลัง

**ความหมายของกำลังจำนวนเต็มบวก**

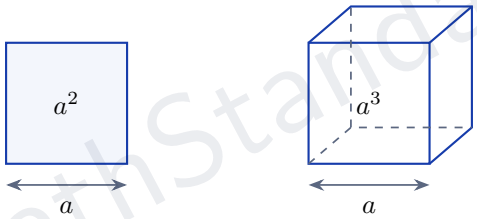
ให้ $a$ เป็นจำนวนจริง และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ตัว}}$$

$a$ เรียกว่า **ฐาน** และ $n$ เรียกว่า **เลขชี้กำลัง** ซึ่งบอกจำนวนตัวประกอบที่นำมาคูณกัน

เลขชี้กำลังมิใช่ตัวคูณของฐาน เช่น $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ ต่างจาก $3(4) = 12$

เมื่อความยาวด้านเท่ากับ $a > 0$ กำลังสองแทนพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส และกำลังสามแทนปริมาตรของลูกบาศก์




**ตัวอย่าง 1** จงเขียน $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ ในรูปเลขยกกำลัง และหาค่า

**วิธีคิด** มีตัวประกอบ $4$ ทั้งหมด $5$ ตัว จึงเขียนเป็น $4^5$ และคำนวณได้ $4^5 = 1{,}024$

**ตอบ** $4^5 = 1{,}024$

ถ้าปริมาณเริ่มต้นเป็น $N_0 \geq 0$ และแต่ละขั้นคูณด้วย $r > 0$ เมื่อผ่านไป $n$ ขั้น โดย $n$ เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ ปริมาณเป็น $N_0 r^n$ โดยนับขั้นเริ่มต้นเป็นขั้นที่ $0$




**ตัวอย่าง 2** รูปแบบหนึ่งเริ่มด้วยจุด $2$ จุด และเพิ่มจำนวนจุดเป็น $3$ เท่าทุกขั้น หลังเพิ่ม $3$ ขั้นมีจุดกี่จุด

**วิธีคิด** จำนวนจุดเป็น $2,\ 6,\ 18,\ 54$ ตามลำดับ หรือคำนวณจาก $2 \times 3^3 = 54$

**ตอบ** $54$ จุด

## 1.2 เครื่องหมายและวงเล็บ

### ฐานติดลบ

เมื่อ $a > 0$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, & n \text{ เป็นคู่} \\ -a^n, & n \text{ เป็นคี่} \end{cases}$$

วงเล็บกำหนดขอบเขตของฐาน เช่น $(-a)^2 = a^2$ แต่ $-a^2 = -(a^2)$

| นิพจน์ | การคูณที่แทน | ค่า |
|---|---|---|
| $(-3)^2$ | $(-3)(-3)$ | $9$ |
| $-3^2$ | $-(3 \cdot 3)$ | $-9$ |
| $(-3)^3$ | $(-3)(-3)(-3)$ | $-27$ |

จำนวนลบจับคู่กันได้ผลคูณบวก เมื่อมีตัวประกอบลบเป็นจำนวนคี่จะเหลือหนึ่งตัว จึงได้ผลคูณลบ

**ตัวอย่าง 3** จงหาค่าของ $(-2)^4 - 2^4$

**วิธีคิด** พจน์แรกมีฐานเป็นลบและเลขชี้กำลังเป็นจำนวนคู่ จึงได้

$$(-2)^4 - 2^4 = 16 - 16 = 0$$

**ตอบ** $0$

**ตัวอย่าง 4** จงหาค่าของ $(-1)^{35} + (-1)^{36} + (-2)^3$

**วิธีคิด** เลขชี้กำลัง $35$ เป็นจำนวนคี่ ส่วน $36$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น

$$(-1)^{35} + (-1)^{36} + (-2)^3 = -1 + 1 - 8 = -8$$

**ตอบ** $-8$

## 1.3 เลขชี้กำลังศูนย์และเลขชี้กำลังลบ

| เลขชี้กำลังของ 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | $-1$ | $-2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ค่าของกำลัง | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

เมื่อลดเลขชี้กำลังทีละ 1 ค่าของกำลังของ 2 หารด้วย 2 ทุกครั้ง จึงขยายความหมายถึงเลขชี้กำลังศูนย์และลบได้อย่างสอดคล้องกัน

**กำลังศูนย์และส่วนกลับ**

เมื่อ $a \neq 0$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

เมื่อ $a, b \neq 0$ มี $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

$0^n = 0$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก ส่วน $0^0$ และกำลังลบของศูนย์ไม่กำหนดค่าในเอกสารนี้

เลขชี้กำลังลบแสดงส่วนกลับ เช่น $2^{-3} = \frac{1}{8}$ ซึ่งเป็นจำนวนบวก จึงต้องแยกเครื่องหมายของฐานออกจากเครื่องหมายของเลขชี้กำลัง

**ตัวอย่าง 5** จงหาค่าของ $7^0 + 3^{-2}$

**วิธีคิด** ใช้ $7^0 = 1$ และ $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ จึงได้ $1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$

**ตอบ** $\frac{10}{9}$

**ตัวอย่าง 6** จงหาค่าของ $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

**วิธีคิด** เปลี่ยนฐานเป็นส่วนกลับแล้วใช้เลขชี้กำลังบวก

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \frac{25}{4}$$

**ตอบ** $\frac{25}{4}$

**สรุป**

ระบุ ฐาน และ ขอบเขต ของ วงเล็บ ก่อน คำนวณ กำลัง ของ ฐาน ลบ ขึ้นกับ คู่คี่ ของ เลขชี้กำลัง ส่วน กำลังศูนย์และกำลังลบต้องมีฐานไม่เป็นศูนย์

เรื่อง เลขยกกำลัง | ตอนที่ 1

# แบบฝึกหัด ระดับง่าย

**ข้อ 1** จงระบุฐานและเลขชี้กำลังของ $6^4$

**ตอบ** . . . . . .

**ข้อ 2** จงเขียน $(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$ ในรูปเลขยกกำลัง และหาค่า

**ตอบ** . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง เลขยกกำลัง | ตอนที่ 1

# แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

**ข้อ 3** จงหาค่าของ $(-5)^2 - 5^2$

**ตอบ** . . . . . .

**ข้อ 4** จงหาค่าของ $(-1)^{28} + (-1)^{29}$

**ตอบ** . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง เลขยกกำลัง

# สรุปเนื้อหา เรื่อง เลขยกกำลัง

## ความหมาย เครื่องหมาย และเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

### นิยามที่ต้องแยกให้ชัด

ให้ $a$ เป็นจำนวนจริง และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ตัว}}$$

เมื่อ $a \neq 0$ มี $a^0 = 1$ และ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$(-a)^2 = a^2$ แต่ $-a^2 = -(a^2)$ กำลังของจำนวนลบเป็นบวกเมื่อเลขชี้กำลังเป็นคู่ และเป็นลบเมื่อเลขชี้กำลังเป็นคี่

$0^n = 0$ เมื่อ $n > 0$ ส่วน $0^0$ และกำลังลบของศูนย์ไม่กำหนดค่าในเนื้อหานี้

## สมบัติของกำลัง

### ให้ $a, b \neq 0$ และ $m, n$ เป็นจำนวนเต็ม

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

กำลังของผลคูณต้องยกกำลังสัมประสิทธิ์ด้วย

ผลบวกของพจน์เหมือนกันใช้ $Ca^n + Da^n = (C + D)a^n$ โดย $C, D$ เป็นสัมประสิทธิ์

## ลำดับการดำเนินการ

คำนวณ วงเล็บ และ เลขยกกำลัง ก่อน คูณ และ หาร จาก ซ้าย ไป ขวา แล้ว บวก และ ลบ จาก ซ้าย ไป ขวา เครื่องหมายเศษส่วนจัดกลุ่มตัวเศษและตัวส่วนแยกกัน ต้องคำนวณแต่ละส่วนก่อนหาร

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง เลขยกกำลัง

# เฉลยคำตอบ

| ข้อ | คำตอบ |
|---|---|
| 1 | ฐาน $6$ เลขชี้กำลัง $4$ |
| 2 | $(-2)^5 = -32$ |
| 3 | $0$ |
| 4 | $0$ |
| 5 | $1$ |
| 6 | $\frac{1}{125}$ |
| 7 | $\frac{3}{16}$ |
| 8 | $\frac{16}{9}$ |
| 9 | $-58$ |
| 10 | $\frac{17}{16}$ |
| 11 | $\frac{27}{8}$ |
| 12 | $-\frac{67}{4}$ |
| 13 | $3 \cdot 2^4 = 48$ จุด |
| 14 | $160$ จุด |
| 15 | $2187$ |
| 16 | $125$ |
| 17 | $12$ |
| 18 | $12$ |
| 19 | $32$ |
| 20 | $\frac{a}{b^2}$ |
| 21 | $343$ |
| 22 | $14$ |

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

# ตอนที่ 1 ความหมายและเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

**ข้อ 1** ในสัญลักษณ์ $a^n$ จำนวน $a$ เป็นฐาน และ $n$ เป็นเลขชี้กำลัง จึงมีฐาน 6 และเลขชี้กำลัง 4
**ตอบ** ฐาน 6 เลขชี้กำลัง 4

**ข้อ 2** มีตัวคูณ $-2$ จำนวนห้าตัว จึงเขียนเป็น $(-2)^5$ กำลังเป็นคี่จึงมีค่าเป็นลบ และ $2^5=32$
**ตอบ** $(-2)^5=-32$

**ข้อ 3** พจน์แรกคือ $(-5)(-5)=25$ และพจน์ที่สองคือ $5(5)=25$ ผลต่างจึงเป็น $25-25=0$
**ตอบ** $0$

**ข้อ 4** กำลังคู่ของ $-1$ เท่ากับ $1$ และกำลังคี่เท่ากับ $-1$ จึงได้ $1+(-1)=0$
**ตอบ** $0$

**ข้อ 5** มี $0^7=0$ เพราะเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก และ $8^0=1$ เพราะฐานไม่เป็นศูนย์ ผลบวกจึงเป็น $1$
**ตอบ** $1$

**ข้อ 6** ใช้ $5^{-3}=\dfrac{1}{5^3}$ และ $5^3=125$
**ตอบ** $\dfrac{1}{125}$

**ข้อ 7** เขียนเป็น $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$
**ตอบ** $\dfrac{3}{16}$

**ข้อ 8** กลับเศษส่วนแล้วเปลี่ยนเลขชี้กำลังเป็นบวก ได้ $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$
**ตอบ** $\dfrac{16}{9}$

**ข้อ 9** ยกกำลังก่อน ได้ $(-4)^3=-64$ แล้วบวก 6 จึงได้ $-58$
**ตอบ** $-58$

**ข้อ 10** ฐาน $8-3=5$ ไม่เป็นศูนย์ จึงมี $5^0=1$ และ $2^{-4}=\dfrac{1}{16}$ รวมเป็น $\dfrac{17}{16}$
**ตอบ** $\dfrac{17}{16}$

**ข้อ 11** ลดรูปเป็น $(\frac{2}{3})^{-3}=(\frac{3}{2})^3=\dfrac{27}{8}$
**ตอบ** $\dfrac{27}{8}$

**ข้อ 12** $(-2)^3=-8$, $(-3)^2=9$ และ $(-1)^{2026}=1$ จึงได้ $\frac{-8-9}{1}+\frac{1}{4}=-17+\frac{1}{4}=-\frac{67}{4}$
**ตอบ** $-\dfrac{67}{4}$