MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง พาราโบลา

www.mathstandard.com

เรื่อง พาราโบลา

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง พาราโบลา ครอบคลุม กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง จุดยอด แกนสมมาตร การเลื่อนกราฟ จุดตัดแกน การสร้างสมการ และค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ พหุนาม สมการกำลังสอง พิกัดฉาก เศษส่วน และกรณฑ์

ขอบเขตและข้อตกลง

- พิจารณาพาราโบลาในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ ซึ่งมีแกนสมมาตรขนานกับแกน y ไม่ครอบคลุมพาราโบลาที่เปิดด้านข้าง
- ตัวแปรและสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น ค่าสุดขีดต้องพิจารณาในโดเมนที่โจทย์กำหนด
- จุดบนกราฟต้องแทนค่าได้ตรงสมการ ภาพที่ไม่ระบุพิกัดหรือมาตราส่วนใช้แสดงแนวคิด ไม่ใช้การวัดจากภาพแทนการคำนวณ
- คำตอบใช้ค่าที่แน่นอน ระบุทั้งค่าฟังก์ชันและตัวแปรเมื่อโจทย์ถามค่าสุดขีด รวมทั้งระบุหน่วยของระยะ พื้นที่ และปริมาณในสถานการณ์
- การแทนตัวแปรจากกำลังสองหรือกรณฑ์ต้องกำหนดขอบเขตของตัวแปรใหม่ แล้วแทนกลับเพื่อตรวจคำตอบของตัวแปรเดิม

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

MathStandard

เรื่อง พาราโบลา

สารบัญ

ตอนที่ 1 พื้นฐานพิกัดและกราฟกำลังสอง

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–14 8

ตอนที่ 2 จุดยอด แกนสมมาตร และการเลื่อนกราฟ

เนื้อหาและตัวอย่าง 17

แบบฝึกหัดข้อ 15–28 26

ตอนที่ 3 จุดตัดแกนและเครื่องหมายของฟังก์ชัน

เนื้อหาและตัวอย่าง 34

แบบฝึกหัดข้อ 29–42 41

ตอนที่ 4 การสร้างสมการและจุดร่วมกับเส้นตรง

เนื้อหาและตัวอย่าง 49

แบบฝึกหัดข้อ 43–56 57

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พาราโบลา

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 พิกัด ความยาว และพื้นที่

เนื้อหาและตัวอย่าง 65

แบบฝึกหัดข้อ 57–70 72

ตอนที่ 6 ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด และการประยุกต์

เนื้อหาและตัวอย่าง 81

แบบฝึกหัดข้อ 71–84 88

ตอนที่ 7 การลดรูปและเงื่อนไขของตัวแปร

เนื้อหาและตัวอย่าง 96

แบบฝึกหัดข้อ 85–98 105

สรุปเนื้อหา เรื่อง พาราโบลา 113

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 99–118 120

เฉลยคำตอบ 130

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 136

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

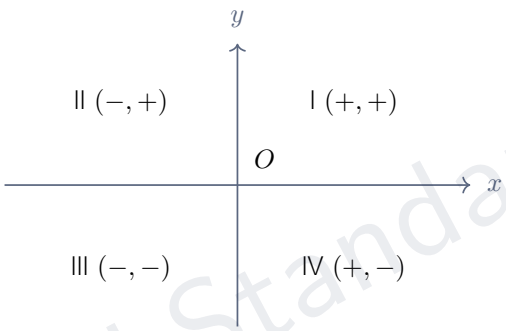
พื้นฐานพิกัดและกราฟกำลังสอง

1.1 พิกัดและจตุภาค

คู่อันดับ (x, y)

x คือพิกัดแนวนอน และ y คือพิกัดแนวตั้ง ลำดับของพิกัดมีความสำคัญ จุด (x, y) กับ (y, x) ไม่จำเป็นต้องเป็นจุดเดียวกัน

จตุภาคที่ $1, 2, 3, 4$ มีเครื่องหมายของ (x, y) เป็น $(+, +)$, $(-, +)$, $(-, -)$, $(+, -)$ ตามลำดับ จุดบนแกนพิกัดไม่อยู่ในจตุภาคใด



ตัวอย่าง 1 จุด $P = (3, -2)$ อยู่ในจตุภาคใด และแตกต่างจาก $Q = (-2, 3)$ อย่างไร

วิธีคิด จุด P มีพิกัดแนวนอนเป็นบวกและแนวตั้งเป็นลบ จึงอยู่ในจตุภาคที่ 4 ส่วน Q มีแนวนอนเป็นลบและแนวตั้งเป็นบวก จึงอยู่ในจตุภาคที่ 2 การสลับลำดับพิกัดทำให้ตำแหน่งเปลี่ยน

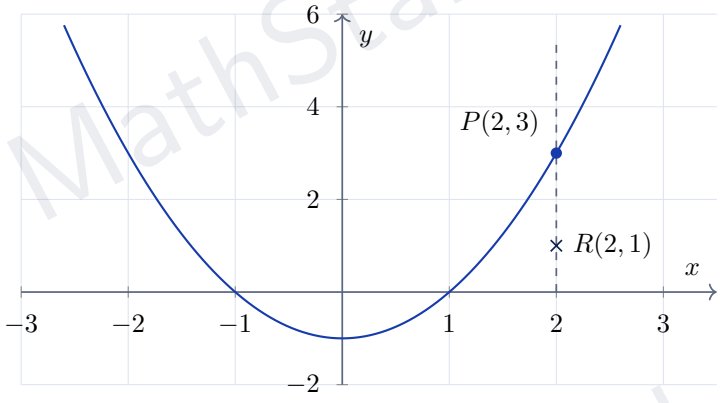
ตอบ P อยู่ในจตุภาคที่ 4 และเป็นคนละจุดกับ Q

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.2 จุดบนกราฟและตารางค่า

สัญลักษณ์ $f(x)$ แทนค่าพิกัดแนวตั้งเมื่อกำหนดพิกัดแนวนอนเป็น x จุด (u,v) อยู่บนกราฟ $y=f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $v=f(u)$ โดย u,v เป็นพิกัดของจุด การเขียนกราฟจากตารางต้องคำนวณค่าให้ตรงคู่อันดับ แล้วลากเส้นโค้งตามลักษณะของฟังก์ชัน ไม่ใช้เส้นตรงต่อจุดแทนเส้นโค้ง

พิกัดที่สอดคล้องกับสมการ



บนกราฟ $y=x^2-1$ เมื่อ $x=2$ จะได้ $y=3$ จึงมี P อยู่บนกราฟ ส่วน R ไม่อยู่บนกราฟ แม้มีพิกัดแนวนอนเท่ากัน

ตัวอย่าง 2 กำหนด $f(x)=2x^2-x+1$ จงหา $f(-2)$ และพิจารณาว่า $P=(-2,11)$ อยู่บนกราฟหรือไม่

วิธีคิด แทน $x=-2$ ได้

$$f(-2)=2(-2)^2-(-2)+1=8+2+1=11$$

พิกัดแนวตั้งของ P เท่ากับค่าที่คำนวณได้

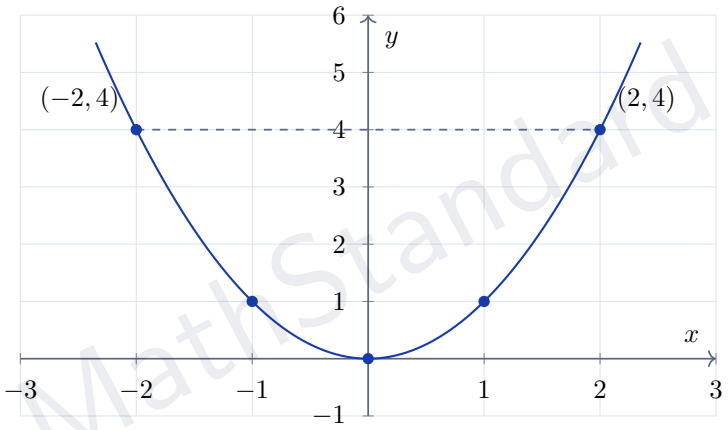
ตอบ $f(-2)=11$ และ P อยู่บนกราฟ

ฟังก์ชันกำลังสอง

$$y=f(x)=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

a,b,c เป็นค่าคงตัวจริง กราฟเป็นพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรขนานกับแกน y โดเมนคือค่าของ x ที่นำมาใช้ ซึ่งเป็นจำนวนจริงทั้งหมด เว้นแต่โจทย์กำหนดช่วงของ x

จากตารางค่าไปสู่เส้นโค้ง



จุดทั้งห้าจากตารางอยู่บน $y = x^2$ เส้นโค้งเชื่อมต่ออย่างต่อเนื่อง และจุดที่มี x ตรงข้ามกันอยู่ในระดับเดียวกัน

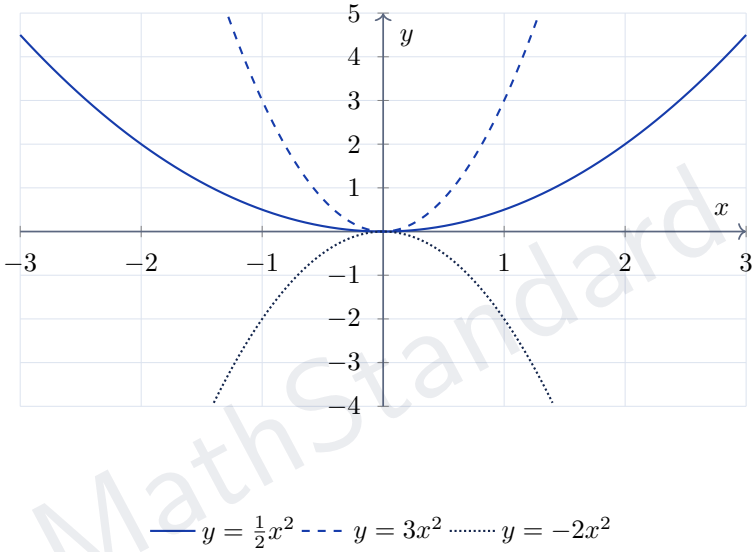
1.3 ทิศทางการเปิดและความกว้าง

พิจารณาสัมประสิทธิ์นำ a

$a > 0$ กราฟเปิดขึ้น $a < 0$ กราฟเปิดลง สำหรับกราฟที่ใช้มาตราส่วนเดียวกันและเทียบจากจุดยอดของแต่ละกราฟ ถ้า $|a|$ มากกว่า กราฟจะแคบกว่า

รูปพื้นฐาน $y = ax^2$ มีจุดยอด $(0, 0)$ และแกนสมมาตร $x = 0$ คู่จุดที่มีพิกัดแนวนอนตรงข้ามกันอยู่ในระดับเดียวกัน

เปรียบเทียบทิศทางและความกว้างด้วยมาตราส่วนเดียวกัน



$y = \frac{1}{2}x^2$ $y = 3x^2$ $y = -2x^2$

กราฟทั้งสามมีจุดยอดเดียวกัน สัมประสิทธิ์บวกทำให้เปิดขึ้น สัมประสิทธิ์ลบทำให้เปิดลง และค่าขนาดสัมบูรณ์ที่มากกว่าทำให้กราฟแคบกว่าเมื่อเทียบจากจุดยอด

ตัวอย่าง 3 จงเปรียบเทียบ $y = \frac{1}{2}x^2$ กับ $y = -3x^2$

วิธีคิด สมการแรกมี $a > 0$ จึงหงาย สมการที่สองมี $a < 0$ จึงคว่ำ และ $3 > \frac{1}{2}$ ทำให้กราฟที่สองแคบกว่าเมื่อใช้มาตราส่วนเดียวกัน

ตอบ กราฟแรกหงายและกว้างกว่า กราฟที่สองคว่ำและแคบกว่า

สรุป

อ่านลำดับพิกัดและเครื่องหมายให้ถูกต้อง ตรวจจุดบนกราฟด้วยการแทนค่า และใช้สัมประสิทธิ์นำพิจารณาทิศทางการเปิดและความกว้างภายใต้มาตราส่วนเดียวกัน

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พาราโบลา | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 กำหนดจุด $A = (-3, 2)$ และ $B = (2, -3)$ จงระบุจตุภาคของแต่ละจุด และอธิบายว่าจุดทั้งสองเป็นจุดเดียวกันหรือไม่

ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 จุด $P = (-2, 3)$ และ $Q = (1, 0)$ จุดใดอยู่บนกราฟ $y = x^2 - 1$

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พาราโบลา | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 สมการใดเป็นกราฟพาราโบลาตามรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$

(ก) $y = 3x - 2$

(ข) $y = -2x^2 + 5$

(ค) $y = x^3 + 1$

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 กำหนด $y = 2x^2$ จงหาค่า y เมื่อ $x = -2, -1, 0, 1, 2$ ตามลำดับ และระบุจุดยอด

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พาราโบลา

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	A จตุภาคที่ 2 B จตุภาคที่ 4 เป็นคนละจุด
2	ทั้ง P และ Q
3	(ข) โดย $a=-2, b=0, c=5$
4	$8, 2, 0, 2, 8$ จุดยอด $(0,0)$
5	A อยู่บนแกน y และ B อยู่ในจตุภาคที่ 4
6	-4 และ -1 ตามลำดับ
7	เฉพาะข้อ ก
8	จุดยอด $(0,0)$ แกนสมมาตร $x=0$ กราฟตามเฉลย
9	ค่า y คือ $-2, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -2$ จุดยอด $(0,0)$
10	ไม่อยู่ระดับเดียวกัน
11	คว่ำ: $y=-2x^2$ กว้างไปแคบ: $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-2x^2$, $y=3x^2$
12	$a=3$ เปิดขึ้น และแคบกว่า $y=2x^2$
13	$y=-2x^2$ และ $(-2,-8)$
14	สูง 6 เมตร และถึงพื้นเมื่อ $t=2$ วินาที
15	$V=(-2,-1)$ แกนสมมาตร $x=-2$
16	$x=4$

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 พื้นฐานพิกัดและกราฟกำลังสอง

ข้อ 1 จุด A มีพิกัด $x<0, y>0$ จึงอยู่ในจตุภาคที่ 2 ส่วนจุด B มีพิกัด $x>0, y<0$ จึงอยู่ในจตุภาคที่ 4 ลำดับของพิกัดมีความหมาย จึงเป็นคนละจุด

ตอบ A จตุภาคที่ 2

B จตุภาคที่ 4

เป็นคนละจุด

ข้อ 2 เมื่อ $x=-2$ ได้ $y=(-2)^2-1=3$ จึงมี P อยู่บนกราฟ เมื่อ $x=1$ ได้ $y=1^2-1=0$ จึงมี Q อยู่บนกราฟเช่นกัน

ตอบ ทั้ง P และ Q

ข้อ 3 สมการ (ข) มี $a=-2\neq 0, b=0, c=5$ ส่วน (ก) เป็นสมการเชิงเส้น และ (ค) มีดีกรีสาม

ตอบ (ข) โดย $a=-2, b=0, c=5$

ข้อ 4 แทนค่าแต่ละค่าลงในสมการ ได้ $2(-2)^2=8$, $2(-1)^2=2$, $2(0)^2=0$, $2(1)^2=2$ และ $2(2)^2=8$ ค่าต่ำสุดเป็นศูนย์เมื่อ $x=0$

ตอบ $8, 2, 0, 2, 8$

จุดยอด $(0,0)$

ข้อ 5 A มีพิกัดแนวนอนเป็นศูนย์ จึงอยู่บนแกน y ส่วน B มีพิกัดแนวนอนบวกและแนวตั้งลบ

ตอบ A อยู่บนแกน y และ B อยู่ในจตุภาคที่ 4

ข้อ 6 แทนทุกตำแหน่งของ x ได้ $f(-1)=-2-3+1$ และ $f(2)=-8+6+1$

ตอบ -4 และ -1 ตามลำดับ

ข้อ 7 ข้อ ก ได้ $y=x^2-4$ มีสัมประสิทธิ์กำลังสองไม่เป็นศูนย์ ข้อ ข ได้ $y=2x+1$ ซึ่งเป็นเชิงเส้น

ตอบ เฉพาะข้อ ก

MathStandard
MathStandard
MathStandard