

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง พหุนาม

www.mathstandard.com

เรื่อง พหุนาม

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง พหุนาม ครอบคลุม เอกนาม พหุนาม การดำเนินการ เอกลักษณ์พีชคณิต ทวินาม การแยกตัวประกอบ การหารและเศษเหลือ ตลอดจนเศษส่วนของพหุนามและการประยุกต์ เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ เศษส่วน เลขยกกำลัง และสมการเชิงเส้น

ขอบเขตและข้อตกลง

- ตัวแปรและสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง เว้นแต่โจทย์กำหนดเป็นอย่างอื่น พหุนามศูนย์ไม่กำหนดดีกรี
- การแยกตัวประกอบในแบบฝึกหัดให้ใช้ตัวประกอบที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม เว้นแต่ระบุขอบเขตอื่น ลำดับของตัวประกอบไม่ส่งผลต่อค่าของผลคูณ
- ตัวส่วนและตัวหารต้องไม่เป็นศูนย์ เงื่อนไขจากนิพจน์เดิมยังคงใช้หลังการตัดทอน
- คำตอบสมการต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมด ระบุค่าที่แตกต่างกันให้ครบถ้วน และระบุหน่วยของปริมาณตามโจทย์
- ทวินาม การหารสังเคราะห์ และทฤษฎีบทเศษเหลือเป็นส่วนขยายสำหรับการประยุกต์ ควรศึกษาตามลำดับหลังเข้าใจการดำเนินการและการแยกตัวประกอบ

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

MathStandard

เรื่อง พหุนาม

สารบัญ

ตอนที่ 1 เอกนามและการดำเนินการของพหุนาม

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–16 8

ตอนที่ 2 เอกลักษณ์ ทวินาม และสามเหลี่ยมปาสคาล

เนื้อหาและตัวอย่าง 17

แบบฝึกหัดข้อ 17–32 22

ตอนที่ 3 การแยกตัวประกอบพื้นฐาน

เนื้อหาและตัวอย่าง 32

แบบฝึกหัดข้อ 33–48 35

ตอนที่ 4 การแยกตัวประกอบโดยใช้รูปแบบของนิพจน์

เนื้อหาและตัวอย่าง 44

แบบฝึกหัดข้อ 49–64 49

ตอนที่ 5 กำลังสองสมบูรณ์และเอกลักษณ์ประยุกต์

เนื้อหาและตัวอย่าง 58

แบบฝึกหัดข้อ 65–80 62

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พหุนาม

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 6 การหารยาวและการหารสังเคราะห์

เนื้อหาและตัวอย่าง 71

แบบฝึกหัดข้อ 81–94 74

ตอนที่ 7 เศษเหลือ ตัวประกอบ และค่าพหุนาม

เนื้อหาและตัวอย่าง 82

แบบฝึกหัดข้อ 95–112 87

ตอนที่ 8 เศษส่วนของพหุนาม

เนื้อหาและตัวอย่าง 97

แบบฝึกหัดข้อ 113–128 101

ตอนที่ 9 การประยุกต์สมการพหุนาม

เนื้อหาและตัวอย่าง 109

แบบฝึกหัดข้อ 129–144 114

สรุปเนื้อหา เรื่อง พหุนาม 123

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 145–164 130

เฉลยคำตอบ 140

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 148

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

เอกนามและการดำเนินการของพหุนาม

1.1 เอกนาม สัมประสิทธิ์ และดีกรี

เอกนามและเงื่อนไขเลขชี้กำลัง

เอกนามเขียนเป็นผลคูณของค่าคงตัวกับตัวแปรที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ เช่น $ax^m y^n$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง และ m, n เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

ถ้า $a \neq 0$ สัมประสิทธิ์คือ a และดีกรีรวมคือ $m+n$ ค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์มีดีกรี 0 ส่วนเอกนามศูนย์ไม่กำหนดดีกรี

เอกนาม	สัมประสิทธิ์	ดีกรีรวม
$-6x^3y^2$	-6	5
x^4	1	4
$-xy$	-1	2
8	8	0

$\sqrt{5}$ เป็นค่าคงตัวจริง แต่ $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ และ $\frac{1}{x} = x^{-1}$ ไม่เป็นเอกนามในตัวแปร x เพราะเลขชี้กำลังของตัวแปรไม่ตรงเงื่อนไข

ตัวอย่าง 1 จงหาสัมประสิทธิ์และดีกรีของ $-\frac{3}{4}a^2b^5$

วิธีคิด สัมประสิทธิ์รวมเครื่องหมายลบด้วย จึงเท่ากับ $-\frac{3}{4}$ ส่วนดีกรีเท่ากับ $2+5=7$

ตอบ สัมประสิทธิ์ $-\frac{3}{4}$ และดีกรี 7

ตัวอย่าง 2 นิพจน์ $\sqrt{5}\,x^2$ เป็นเอกนามใน x หรือไม่

วิธีคิด $\sqrt{5}$ เป็นค่าคงตัว และตัวแปร x มีเลขชี้กำลัง 2 ซึ่งเป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

ตอบ เป็นเอกนาม มีสัมประสิทธิ์ $\sqrt{5}$ และดีกรี 2

1.2 พจน์คล้ายและพหุนาม

รวมสัมประสิทธิ์ของส่วนตัวแปรเดียวกัน

พจน์คล้ายมีตัวแปรและเลขชี้กำลังของแต่ละตัวเหมือนกัน

$$ax^m y^n + bx^m y^n = (a+b)x^m y^n$$

a, b เป็นสัมประสิทธิ์จริง และ m, n เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

พหุนามคือผลบวกของเอกนามจำนวนจำกัด ดีกรีของพหุนามที่ไม่เป็นศูนย์คือดีกรีสูงสุดของพจน์ที่เหลือหลังรวมพจน์คล้าย

$3x^2y$ กับ $-5x^2y$ เป็นพจน์คล้าย ส่วน $3x^2y$ กับ $3xy^2$ ไม่เป็นพจน์คล้าย พหุนามศูนย์ไม่กำหนดดีกรี

ตัวอย่าง 3 จงจัดรูป $4x^3 + 2x^2 - 7 - 4x^3 + 5x$ และหาดีกรี

วิธีคิด พจน์ $4x^3$ กับ $-4x^3$ รวมกันเป็นศูนย์ จึงเหลือ $2x^2 + 5x - 7$ พจน์นำคือ $2x^2$

ตอบ $2x^2 + 5x - 7$ มีดีกรี 2

1.3 พหุนามตัวแปรเดียวและรูปทั่วไป

เรียงตามเลขชี้กำลังจากมากไปน้อย

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

n เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ สัมประสิทธิ์ $a_n, \ldots, a_0$ เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$ พหุนามมีดีกรี n พจน์นำคือ $a_n x^n$ สัมประสิทธิ์นำคือ a_n และพจน์คงตัวคือ a_0

เมื่อ $n = 0$ ได้พหุนามคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์ สัมประสิทธิ์ของกำลังอื่นอาจเป็นศูนย์ จึงไม่จำเป็นต้องปรากฏทุกพจน์ เช่น

$$3x^4 - 2x^2 + 5 = 3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 5$$

กำลังของ x	4	3	2	1	0
สัมประสิทธิ์	3	0	-2	0	5

MathStandard

1.4 ค่าของพหุนาม

$P(c)$ คือค่าที่ได้จากการแทน $x = c$ ทุกตำแหน่งใน $P(x)$ เมื่อแทนจำนวนลบ ให้ใส่วงเล็บก่อนยกกำลัง

ตัวอย่าง 4 กำหนด $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$ จงหา $P(-2)$

วิธีคิด

$$P(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) + 4 = 8 + 6 + 4 = 18$$

ตอบ 18

1.5 การบวก การลบ และการคูณ

> **แจกแจงและรวมพจน์คล้าย**
>
> $$A - (B + C - D) = A - B - C + D$$
>
> $$x^m x^n = x^{m+n}, \qquad a(B + C) = aB + aC$$
>
> m, n เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ ส่วน A, B, C, D แทนนิพจน์ การลบวงเล็บต้องเปลี่ยนเครื่องหมายทุกพจน์ การคูณต้องคูณทุกคู่แล้วจึงรวมพจน์คล้าย

ตัวอย่าง 5 จงหาผลต่าง $(3x^2 - 2x + 5) - (x^2 + 4x - 1)$

วิธีคิด

$$3x^2 - 2x + 5 - x^2 - 4x + 1 = 2x^2 - 6x + 6$$

ตอบ $2x^2 - 6x + 6$

ตัวอย่าง 6 จงหาผลคูณ $-2xy(3x^2 - 4xy + 5)$

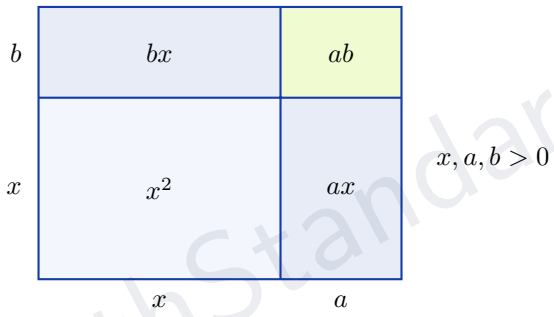
วิธีคิด คูณ $-2xy$ เข้ากับแต่ละพจน์ ได้

$$(-2xy)(3x^2) + (-2xy)(-4xy) + (-2xy)(5) = -6x^3y + 8x^2y^2 - 10xy$$

ตอบ $-6x^3y + 8x^2y^2 - 10xy$

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.6 การคูณพหุนามและสัมประสิทธิ์ของผลคูณ



$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

a, b เป็นค่าคงตัวจริง ภาพพื้นที่ใช้เมื่อความยาวเป็นบวก แต่เอกลักษณ์พหุนามเป็นจริงสำหรับจำนวนจริงทุกค่าของตัวแปร

สัมประสิทธิ์ของ x^k ในผลคูณได้จากผลบวกของผลคูณสัมประสิทธิ์ทุกคู่ที่เลขชี้กำลังรวมกันเป็น k ไม่จำเป็นต้องกระจายพจน์ที่ไม่เกี่ยวข้อง

ตัวอย่าง 7 จงหาผลคูณ $(2x-3)(x+4)$

วิธีคิด

$$(2x-3)(x+4) = 2x^2 + 8x - 3x - 12 = 2x^2 + 5x - 12$$

ตอบ $2x^2 + 5x - 12$

ตัวอย่าง 8 จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^2 ใน $(x^2+3x-2)(2x+5)$

วิธีคิด ผลคูณที่ให้พจน์ x^2 คือ $x^2(5)$ และ $(3x)(2x)$ จึงได้ $(5+6)x^2 = 11x^2$

ตอบ 11

> **สรุป**
> พิจารณาเลขชี้กำลังก่อนจำแนกเอกนาม รวมพจน์คล้ายก่อนหาดีกรี ระบุสัมประสิทธิ์ศูนย์เมื่อกำลังใดขาด และคูณทุกคู่ที่มีส่วนต่อพจน์ที่ต้องการ

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พหุนาม | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 จงพิจารณาว่า $-5x^2y$, $\frac{3}{x}$ และ $\sqrt{7}\,x$ นิพจน์ใดเป็นเอกนาม พร้อมให้เหตุผล

ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 จงหาสัมประสิทธิ์ ดีกรีรวม และดีกรีในตัวแปร x ของ $-\frac{2}{5}x^3y^4$

ตอบ . . . . . .

MathStandard

เรื่อง พหุนาม | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 จงหาดีกรีของ -9 และ $4x^2 - 4x^2$

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 จงจัดรูป $5x^4 - 2x^2 + 3x - 5x^4 + 7x^2 - 8$ และหาดีกรีของพหุนามที่ได้

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง พหุนาม

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	$-5x^2y,\ \sqrt{7}\,x$
2	$-\frac{2}{5},\ 7,\ 3$ ตามลำดับ
3	0 และไม่กำหนดดีกรี
4	$5x^2+3x-8$ ดีกรี 2
5	$-2a^2b+2ab^2$
6	$-2x^3+5x+3$ ดีกรี 3 สัมประสิทธิ์นำ -2 พจน์คงตัว 3
7	$5x^2+5x+2$
8	$3x^2+6x-8$
9	$-6x^3y+15x^2y^2-12xy$
10	$3x^2+13x-10$
11	$5x^2-x-3$ ดีกรี 2
12	$k=5$
13	5
14	$a=2$
15	$x^2+10x+21$ ตารางเซนติเมตร เมื่อ $x=2$ ได้ 45 ตารางเซนติเมตร
16	$2x^2+5x+2$ ตารางเซนติเมตร และ 35 ตารางเซนติเมตร
17	$16x^2-24x+9$
18	$(5x-7)(5x+7)$
19	49
20	$(4a+5b)^2$
21	15 และ 15

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 เอกนามและการดำเนินการของพหุนาม

ข้อ 1 $-5x^2y$ มีเลขชี้กำลัง $2, 1$ และ $\sqrt{7}\,x$ มีเลขชี้กำลังของ x เป็น 1 ส่วน $\frac{3}{x} = 3x^{-1}$ มีเลขชี้กำลังเป็นลบ

ตอบ $-5x^2y,\ \sqrt{7}\,x$

ข้อ 2 สัมประสิทธิ์คือ $-\frac{2}{5}$ ดีกรีรวมเท่ากับ $3+4=7$ และดีกรีใน x เท่ากับเลขชี้กำลัง 3

ตอบ $-\frac{2}{5},\ 7,\ 3$ ตามลำดับ

ข้อ 3 ค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์มีดีกรี 0 ส่วน $4x^2-4x^2=0$ เป็นพหุนามศูนย์ จึงไม่กำหนดดีกรี

ตอบ 0 และไม่กำหนดดีกรี

ข้อ 4 รวมพจน์กำลังสี่ได้ศูนย์ และรวมพจน์กำลังสองได้ $5x^2$ จึงเหลือ $5x^2+3x-8$

ตอบ $5x^2+3x-8$ ดีกรี 2

ข้อ 5 รวมพจน์ a^2b และ ab^2 แยกกัน ได้ $(7-9)a^2b+(-3+5)ab^2$

ตอบ $-2a^2b+2ab^2$

ข้อ 6 เขียนเป็น $P(x)=-2x^3+0x^2+5x+3$ พจน์กำลังสูงสุดคือ $-2x^3$ และพจน์ที่ไม่มี x คือ 3

ตอบ $-2x^3+5x+3$ ดีกรี 3 สัมประสิทธิ์นำ -2 พจน์คงตัว 3

ข้อ 7 รวมสัมประสิทธิ์ของพจน์คล้าย ได้ $(3+2)x^2+(-4+9)x+(7-5)$

ตอบ $5x^2+5x+2$

ข้อ 8 กระจายเครื่องหมายลบได้ $4x^2+x-6-x^2+5x-2$ แล้วรวมพจน์คล้าย

ตอบ $3x^2+6x-8$

ข้อ 9 แจกแจง $-3xy$ เข้าทุกพจน์ ได้ $-6x^3y+15x^2y^2-12xy$

ตอบ $-6x^3y+15x^2y^2-12xy$

ข้อ 10 ผลคูณเท่ากับ $3x^2+15x-2x-10$ แล้วรวมพจน์ x

ตอบ $3x^2+13x-10$

ข้อ 11 รวมพจน์คล้าย โดยสัมประสิทธิ์ของ x^3 หักล้างกัน ได้ $5x^2-x-3$

ตอบ $5x^2-x-3$ ดีกรี 2

ข้อ 12 พจน์ที่ให้ x คือ $(kx)(3)$ และ $(-2)(2x)$ จึงมี $3k-4=11$

ตอบ $k=5$

ข้อ 13 พจน์ที่ตรงเงื่อนไขคือ $(x^2)(-xy)=-x^3y$ และ $(2xy)(3x^2)=6x^3y$ รวมได้ $5x^3y$

ตอบ 5