MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง ความน่าจะเป็น

www.mathstandard.com

เรื่อง ความน่าจะเป็น

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง ความน่าจะเป็น ครอบคลุม หลักการนับ การเลือกและการเรียง การแจกสิ่งของ หลักรังนกพิราบ การนับทางเรขาคณิต และความน่าจะเป็นจากการทดลองสุ่มและการหยิบสิ่งของ เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ จำนวนเต็ม เศษส่วน อัตราส่วน ร้อยละ สมการ และเรขาคณิตเบื้องต้น

ขอบเขตและข้อตกลง

- ระบุว่าสิ่งของแยกกันได้หรือไม่ พิจารณาลำดับหรือไม่ ใช้ซ้ำได้หรือไม่ และการหมุนหรือพลิกถือว่าเป็นแบบเดียวกันหรือไม่ ก่อนเลือกวิธีนับ
- ใช้ $n!$ แทนแฟกทอเรียล $\binom{n}{r}$ แทนการเลือกเป็นกลุ่ม และ $P_{n,r}$ แทนการเลือกแล้วเรียง โดยอธิบายความหมายตัวแปรและเงื่อนไขในแต่ละหัวข้อ
- ใช้ $P(E)$ แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E สูตรอัตราส่วนจำนวนผลลัพธ์ใช้เมื่อผลลัพธ์ทั้งหมดมีจำนวนจำกัดและมีโอกาสเกิดเท่ากัน
- การหยิบต้องระบุว่าเป็นแบบใส่คืน แบบไม่ใส่คืน หรือการหยิบพร้อมกัน นับเศษและส่วนของความน่าจะเป็นด้วยผลลัพธ์ชนิดเดียวกัน
- ใช้คำอธิบายเหตุการณ์เป็นภาษาไทยเป็นหลัก สัญลักษณ์ที่จำเป็นมีความหมายกำกับไว้ โดยอธิบายความหมายของสัญลักษณ์เซตที่จำเป็นก่อนใช้

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

เรื่อง ความน่าจะเป็น

สารบัญ

ตอนที่ 1 แฟกทอเรียลและการตัดทอน

เนื้อหาและตัวอย่าง 5

แบบฝึกหัดข้อ 1–16 8

ตอนที่ 2 หลักการนับและการแยกกรณี

เนื้อหาและตัวอย่าง 17

แบบฝึกหัดข้อ 17–42 23

ตอนที่ 3 การจัดหมู่

เนื้อหาและตัวอย่าง 38

แบบฝึกหัดข้อ 43–58 41

ตอนที่ 4 การแจกสิ่งของและหลักรังนกพิราบ

เนื้อหาและตัวอย่าง 50

แบบฝึกหัดข้อ 59–84 59

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ความน่าจะเป็น

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 การเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง

เนื้อหาและตัวอย่าง 74

แบบฝึกหัดข้อ 85–100 77

ตอนที่ 6 การเรียงรอบวงและสร้อยวงปิด

เนื้อหาและตัวอย่าง 86

แบบฝึกหัดข้อ 101–116 90

ตอนที่ 7 การนับผลลัพธ์ด้วยตาราง

เนื้อหาและตัวอย่าง 100

แบบฝึกหัดข้อ 117–132 106

ตอนที่ 8 การนับทางเรขาคณิต

เนื้อหาและตัวอย่าง 116

แบบฝึกหัดข้อ 133–158 122

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ความน่าจะเป็น

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 9 การนับบนลูกบาศก์

เนื้อหาและตัวอย่าง 139

แบบฝึกหัดข้อ 159–174 143

ตอนที่ 10 ความน่าจะเป็นพื้นฐาน

เนื้อหาและตัวอย่าง 153

แบบฝึกหัดข้อ 175–190 158

ตอนที่ 11 ความน่าจะเป็นจากการเรียงและการเลือก

เนื้อหาและตัวอย่าง 167

แบบฝึกหัดข้อ 191–206 170

ตอนที่ 12 ความน่าจะเป็นจากการหยิบสิ่งของ

เนื้อหาและตัวอย่าง 181

แบบฝึกหัดข้อ 207–222 187

สรุปเนื้อหา เรื่อง ความน่าจะเป็น 198

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 223–242 212

เฉลยคำตอบ 222

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 233

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

แฟกทอเรียลและการตัดทอน

1.1 ความหมายของแฟกทอเรียล

การนับผลลัพธ์เป็นพื้นฐานของความน่าจะเป็น เมื่อมีทางเลือกจำนวนมาก การเขียนผลคูณด้วยสัญลักษณ์ช่วยแสดงโครงสร้างการนับได้ชัดเจน

สำหรับจำนวนเต็มบวก n สัญลักษณ์ $n!$ อ่านว่า “เอ็นแฟกทอเรียล” หมายถึงผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ n ลงมาถึง 1 เครื่องหมายนี้ใช้กับทั้งจำนวน ไม่ใช่ยกกำลัง

สัญลักษณ์	ผลคูณ	ค่า
$1!$	1	1
$2!$	2×1	2
$3!$	$3 \times 2 \times 1$	6
$4!$	$4 \times 3 \times 2 \times 1$	24

นิยามและข้อตกลง

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

กำหนดให้ $0! = 1$ ซึ่งสอดคล้องกับการจัดเรียงสิ่งของศูนย์ชิ้นที่มีหนึ่งแบบ คือไม่วางสิ่งใด

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $5!$

วิธีคิด ขยายตามนิยามได้ $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ตอบ 120

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.2 แฟกทอเรียลกับการจัดเรียง

การเรียงสิ่งของต่างกันทุกชิ้นในแนวตรงถือว่าต่างวิธีกันเมื่อมีตำแหน่งใดเปลี่ยนไป ต้องวางครบทุกชิ้นและใช้แต่ละชิ้นเพียงครั้งเดียว

เมื่อมี n ชิ้น ตำแหน่งแรกเลือกได้ n ชิ้น หลังใช้ไปหนึ่งชิ้น ตำแหน่งที่สองเหลือ $n-1$ ชิ้น ต่อไปลดลงทีละหนึ่งจนตำแหน่งสุดท้ายเหลือหนึ่งชิ้น



จำนวนการเรียงทั้งหมด

สิ่งของต่างกัน n ชิ้น เรียงครบในแนวตรงได้

$$n(n-1)\cdots 1 = n! \quad \text{วิธี}$$

หากมีสิ่งของเหมือนกัน ต้องปรับวิธีนับเพื่อตัดการสลับที่ไม่ทำให้เกิดแบบใหม่

ตัวอย่าง 2 เรียงบัตรอักษร A, B, C ให้ครบทุกใบได้กี่ลำดับ

วิธีคิด แจกแจงได้ $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$ รวม 6 ลำดับ ซึ่งเท่ากับ $3 \times 2 \times 1$

ตอบ 6 ลำดับ

1.3 การตัดทอนอัตราส่วนแฟกทอเรียล

เมื่อ นิพจน์ เป็น เศษส่วน ให้ ขยาย แฟกทอเรียล ใน เศษ จน พบ แฟกทอเรียล ที่ ตรง กับ ตัว ส่วน แล้ว ตัด ตัวประกอบร่วมก่อนคำนวณ

ตัวอย่างโครงสร้างทั่วไป $n! = n(n-1)(n-2)!$ ทำให้เห็นว่าการหารด้วย $(n-2)!$ เหลือเพียงสองตัวประกอบ ไม่จำเป็นต้องหาค่าแฟกทอเรียลทั้งสองก่อน

ผลคูณที่เหลือหลังตัดทอน

สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq r \geq 0$

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

มีตัวประกอบ r ตัว เมื่อ $r = 0$ อัตราส่วนเท่ากับ 1

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $\dfrac{8!}{5!3!}$

วิธีคิด เขียน $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5!$ แล้วตัด $5!$

$$\frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

ตอบ 56

1.4 ผลบวก ผลต่าง และสมการ

การตัดทอนทำได้ระหว่างตัวประกอบของเศษและส่วน จึงต้องจัดรูปผลบวกหรือผลต่างให้เป็นผลคูณก่อน ไม่ตัดแฟกทอเรียลข้ามเครื่องหมายบวกหรือลบ

หากนิพจน์มีตัวแปร ให้ระบุว่าค่าในแฟกทอเรียลเป็นจำนวนเต็มไม่ลบ แล้วตัดทอนเพื่อเปลี่ยนเป็นสมการที่คุ้นเคย

ดึงตัวประกอบร่วม

เมื่อ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม

$$n! + (n-1)! = (n+1)(n-1)!$$

$$n! - (n-1)! = (n-1)(n-1)!$$

และ $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1$ เมื่อ $n \geq 0$

ตัวอย่าง 4 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $\dfrac{(n+1)!}{n!} = 6$ จงหา $n! + (n-1)!$

วิธีคิด ตัดทอนได้ $n+1 = 6$ จึง $n = 5$ จากนั้นดึง $4!$ เป็นตัวประกอบ

$$5! + 4! = (5+1)4! = 6(24) = 144$$

ตอบ 144

สรุป

ให้ n เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ แฟกทอเรียลคือ $n! = n(n-1)\cdots 2 \times 1$ เมื่อ $n \geq 1$ และกำหนด $0! = 1$ การเรียงของต่างกันครบ n ชิ้นมี $n!$ วิธี

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots(n-r+1), \qquad 0 \leq r \leq n$$

อัตราส่วนแฟกทอเรียลให้ขยายเฉพาะพจน์ที่ต้องตัดทอน ผลบวกหรือผลต่างให้แยกตัวประกอบร่วมก่อน ในสมการต้องตรวจว่าจำนวนภายในแฟกทอเรียลเป็นจำนวนเต็มไม่ลบ

เรื่อง ความน่าจะเป็น | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 จงหาค่าของ $6!$

ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 แฟ้มโครงงานต่างกัน 5 แฟ้มเรียงในแนวตรงได้ $5!$ วิธี จงหาจำนวนวิธีดังกล่าว

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ความน่าจะเป็น | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 จงหาค่าของ $\frac{10!}{7!}$

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 จงหาค่าของ $6! + 5!$ โดยใช้ตัวประกอบร่วม

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ความน่าจะเป็น

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	720
2	120 วิธี
3	720
4	840
5	62
6	84
7	66
8	720
9	64
10	25
11	(ก) 336 (ข) 7 (ค) 45 (ง) 8 (จ) 72
12	504
13	4,320
14	5
15	6
16	120 วิธี
17	24 แบบ
18	64 แบบ
19	64 รหัส
20	64 ลำดับ
21	16 รหัส

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 แฟกทอเรียลและการตัดทอน

ข้อ 1 เขียนผลคูณตั้งแต่ 6 ลดลงจนถึง 1

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

ตอบ 720

ข้อ 2 ตำแหน่งแรกเลือกได้ 5 แฟ้ม ตำแหน่งถัดไปเหลือ $4, 3, 2, 1$ แฟ้มตามลำดับ

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

ตอบ 120 วิธี

ข้อ 3 ขยาย $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7!$ แล้วตัด $7!$

$$\frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

ตอบ 720

ข้อ 4 เขียน $6! = 6 \times 5!$ จึงดึง $5!$ เป็นตัวประกอบร่วม

$$6! + 5! = (6+1)5! = 7 \times 120 = 840$$

ตอบ 840

ข้อ 5 ตัด $6!$ ในพจน์แรก และขยาย $3!$ ในพจน์ที่สอง

$$8 \times 7 + 3 \times 2 \times 1 = 62$$

ตอบ 62

ข้อ 6 การหารด้วย $3!$ เท่ากับนำ $3!$ ไปคูณในตัวส่วน

$$\frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

ตอบ 84

ข้อ 7 ตัด $10!$ แล้วหารด้วย $2! = 2$

$$\frac{12 \times 11}{2} = 66$$

ตอบ 66

ข้อ 8 ตัด $n!$ ได้ $n+1 = 7$ ดังนั้น $n = 6$

$$n! = 6! = 720$$

ตอบ 720