MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ครอบคลุม ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ อัตราส่วนของด้าน เส้นสูง พื้นที่ ระยะทาง รูปสามเหลี่ยมต่อเนื่อง และการประยุกต์ในรูปสองมิติและสามมิติ เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ จำนวนจริง กรณฑ์ อัตราส่วน สมการ พื้นที่ และความคล้าย

ขอบเขตและข้อตกลง

- ในสามเหลี่ยม ABC ใช้ $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ แทนความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ ด้านฉากขึ้นอยู่กับตำแหน่งมุมฉากของรูปที่พิจารณา
- ทฤษฎีบทใช้กับสามเหลี่ยมมุมฉาก ต้องระบุมุมฉากและด้านตรงข้ามให้ถูกต้องก่อนแทนค่า การใช้บทกลับต้องตรวจว่าความยาวสร้างสามเหลี่ยมได้
- ความยาวและตัวคูณอัตราส่วนเป็นบวก ตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์ ใช้หน่วยเดียวกัน และเลือกรากบวกเมื่อหาความยาว
- ใช้ Area แทนพื้นที่ และระบุความหมายของตัวแปรในแต่ละหัวข้อ ความยาว พื้นที่ และปริมาตรมีหน่วยต่างกัน
- รูปประกอบแสดงความสัมพันธ์ การคำนวณใช้เงื่อนไขที่กำหนด ไม่ใช้การวัดจากภาพ คำตอบใช้ค่าที่แน่นอน เว้นแต่ระบุการประมาณค่า

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

สารบัญ

ตอนที่ 1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–16 12

ตอนที่ 2 พื้นที่และความสัมพันธ์ของด้าน

เนื้อหาและตัวอย่าง 21

แบบฝึกหัดข้อ 17–32 29

ตอนที่ 3 เส้นสูงจากมุมฉาก

เนื้อหาและตัวอย่าง 38

แบบฝึกหัดข้อ 33–48 44

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 4 การใช้ความสูงร่วม

เนื้อหาและตัวอย่าง 53

แบบฝึกหัดข้อ 49–64 60

ตอนที่ 5 ระยะทางและสามเหลี่ยมต่อเนื่อง

เนื้อหาและตัวอย่าง 69

แบบฝึกหัดข้อ 65–80 77

ตอนที่ 6 สี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปทรงสามมิติ

เนื้อหาและตัวอย่าง 85

แบบฝึกหัดข้อ 81–96 93

สรุปเนื้อหา เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส 101

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 97–116 107

เฉลยคำตอบ 117

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 123

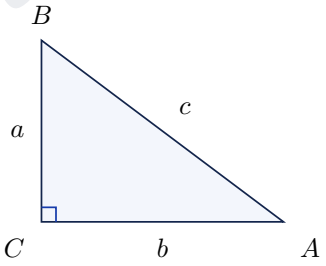
MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

1.1 ด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

สามเหลี่ยมมุมฉากมีมุมหนึ่งเท่ากับ 90° ด้านสองด้านที่พบกัน ณ มุมฉากเรียกว่า **ด้านประกอบมุมฉาก** ส่วนด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉากเรียกว่า **ด้านตรงข้ามมุมฉาก** ซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุดของรูป
ชนิดของด้านพิจารณาจากตำแหน่งของมุมฉาก การหมุนหรือพลิกรูปไม่เปลี่ยนความสัมพันธ์ของด้าน



$a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ และมุม C เป็นมุมฉาก จึงมี c เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ในสามเหลี่ยม ABC ที่มี $C = 90^\circ$ ด้าน a, b, c อยู่ตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ จึงมีด้านประกอบมุมฉากยาว a, b และด้านฉากยาว c ดังนั้น

$$c^2 = a^2 + b^2$$

โดย a, b, c เป็นความยาวบวกที่ใช้หน่วยเดียวกัน

ตัวอย่าง 1 สามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านประกอบมุมฉากยาว 9 และ 12 หน่วย จงหาด้านตรงข้ามมุมฉาก
วิธีคิด ให้ c เป็นความยาวด้านที่ต้องการ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

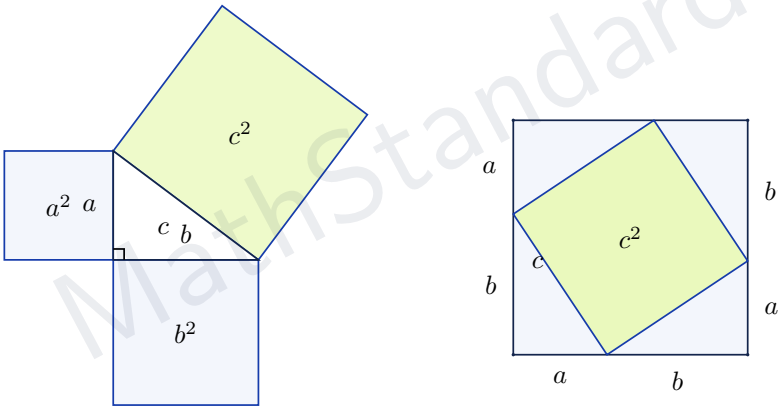
$$c^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

ดังนั้น $c = \sqrt{225} = 15$ เนื่องจากความยาวเป็นบวก
ตอบ 15 หน่วย

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.2 ความหมายของกำลังสองและที่มาของทฤษฎีบท

ถ้าสร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉาก พื้นที่สี่เหลี่ยมบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมบนด้านประกอบมุมฉาก



ซ้าย: ความสัมพันธ์ของพื้นที่ ขวา: การจัดรูปเพื่อพิสูจน์

รูปขวาเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้านยาว $a+b$ ภายในประกอบด้วยสามเหลี่ยมมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ 4 รูป และสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้านยาว c ตรงกลาง มุมของรูปตรงกลางเป็นมุมฉาก เพราะมุมแหลมสองมุมของสามเหลี่ยมรวมกันได้ 90°

เมื่อคำนวณพื้นที่รูปใหญ่สองแบบ จะได้

$$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

สูตรเป็นความสัมพันธ์ของ **กำลังสองของความยาว** จึงไม่ใช่ $c = a+b$ และโดยทั่วไป $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$

ตัวอย่าง 2 ด้านประกอบมุมฉากยาว 4 และ 7 หน่วย จงหาด้านตรงข้ามมุมฉาก

วิธีคิด ให้ความยาวเป็น $c > 0$ จะได้ $c^2 = 4^2 + 7^2 = 65$ ดังนั้น $c = \sqrt{65}$ โดยเก็บคำตอบในรูปกรณฑ์ได้เนื่องจาก 65 ไม่มีตัวประกอบกำลังสองที่มากกว่า 1

ตอบ $\sqrt{65}$ หน่วย

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.3 การหาด้านประกอบมุมฉาก

เมื่อทราบด้านตรงข้ามมุมฉากและด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่ง ให้เริ่มจากสมการเดิม แล้วลบกำลังสองของด้านที่ทราบออกจากทั้งสองข้าง

หาด้านที่ยังไม่ทราบ

$$a^2 = c^2 - b^2 \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

สูตรนี้ใช้เมื่อมุม C เป็นมุมฉาก ด้าน c จึงอยู่ตรงข้ามมุมฉาก และมี $c > b > 0$

ตัวอย่าง 3 เสาค้ำยาว 13 เมตรพาดจากพื้นถึงผนังแนวดิ่ง โดยปลายบนสูงจากพื้น 12 เมตร จงหาระยะปลายล่างจากผนัง

วิธีคิด พื้นกับผนังตั้งฉากกัน เสาค้ำจึงเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก ให้ระยะที่ต้องการเป็น x เมตร

$$x^2 + 12^2 = 13^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 169 - 144 = 25$$

จึงได้ $x = 5$ และตรวจได้ว่า $5^2 + 12^2 = 13^2$

ตอบ 5 เมตร

1.4 ความยาวด้านที่เป็นนิพจน์

หากโจทย์กำหนดด้านเป็นนิพจน์ของตัวแปร ให้ใช้ความสัมพันธ์เดิมสร้างสมการ แล้วตรวจว่าค่าที่ได้ทำให้ความยาวทุกด้านเป็นบวก

ตัวอย่าง 4 ด้านประกอบมุมฉากยาว 12 และ x หน่วย ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $x + 6$ หน่วย จงหา x

วิธีคิด แทนความยาวลงในทฤษฎีบทแล้วกระจายกำลังสอง

$$12^2 + x^2 = (x + 6)^2$$

$$144 + x^2 = x^2 + 12x + 36$$

$$108 = 12x$$

จึงได้ $x = 9$ และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 15 หน่วย ซึ่งให้ $9^2 + 12^2 = 15^2$

ตอบ 9

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.5 ชุดจำนวนพีทาโกรัสและการย่อขยาย

จำนวนเต็มบวกสามจำนวน a, b, c ที่ทำให้ $a^2 + b^2 = c^2$ เรียกว่า **ชุดจำนวนพีทาโกรัส** ตารางต่อไปนี้เป็นชุดที่ใช้บ่อย โดยจำนวนในคอลัมน์สุดท้ายเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
9	40	41
12	35	37
20	21	29

เมื่อคูณความยาวทั้งสามด้วยจำนวนบวก k จะยังคงเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก เพราะ

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = (kc)^2$$

ตัวอย่างเช่น $3 : 4 : 5$ ให้ชุด $6, 8, 10$ เมื่อคูณด้วย 2 และให้ชุด $1.5, 2, 2.5$ เมื่อคูณด้วย 0.5 การย่อหรือขยายต้องใช้ตัวคูณเดียวกันกับทุกด้าน

ตัวอย่าง 5 สามเหลี่ยมมุมฉากมีอัตราส่วนด้านประกอบมุมฉาก $5 : 12$ และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 39 หน่วย จงหาด้านทั้งสอง

วิธีคิด ให้ $t > 0$ เป็นตัวคูณร่วมของอัตราส่วน จึงกำหนดด้านประกอบมุมฉากยาว $5t, 12t$ หน่วย จากชุดจำนวนพีทาโกรัส $5, 12, 13$ ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $13t$ หน่วย จึงมี $13t = 39$ และ $t = 3$ ดังนั้นด้านประกอบมุมฉากยาว $15, 36$ หน่วย

ตอบ 15 และ 36 หน่วย

การจำชุดจำนวนช่วยตรวจคำตอบ แต่ยังต้องตรวจว่าด้านที่ยาวที่สุดตรงกับด้านตรงข้ามมุมฉาก

1.6 บทกลับและการจำแนกชนิดสามเหลี่ยม

ก่อนจำแนกชนิดของมุม ต้องตรวจว่าความยาวสร้างสามเหลี่ยมได้ ให้เรียง $0 < a \leq b \leq c$ จะสร้างสามเหลี่ยมได้เมื่อ $a + b > c$ หาก $a + b = c$ จุดทั้งสามจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

เมื่อทราบเพียงสองด้านยาว a, b ด้านที่สามยาว x ต้องสอดคล้องกับ $|a - b| < x < a + b$

พิจารณาด้านที่ยาวที่สุด

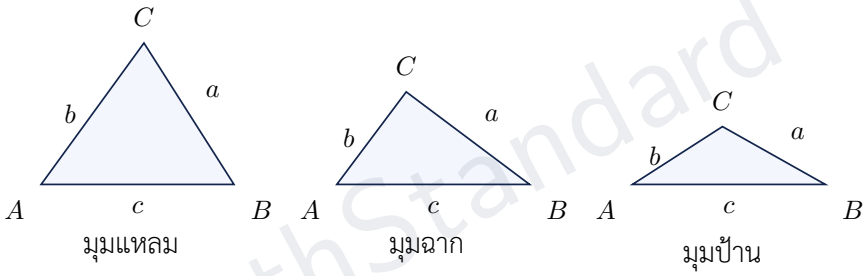
เมื่อ c ยาวที่สุดและสร้างสามเหลี่ยมได้แล้ว

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Longrightarrow \quad \text{สามเหลี่ยมมุมฉาก}$$

$$c^2 < a^2 + b^2 \quad \Longrightarrow \quad \text{สามเหลี่ยมมุมแหลม}$$

$$c^2 > a^2 + b^2 \quad \Longrightarrow \quad \text{สามเหลี่ยมมุมป้าน}$$

กรณีเท่ากันคือ **บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส**



มุม C อยู่ตรงข้ามด้าน c ซึ่งยาวที่สุด

ตัวอย่าง 6 จงจำแนกชุดความยาว $(6, 8, 10)$, $(6, 8, 9)$ และ $(6, 8, 11)$

วิธีคิด ทุกชุดสร้างสามเหลี่ยมได้ เพราะผลบวกด้านสั้นสองด้านคือ 14 มากกว่าด้านยาวที่สุด เปรียบเทียบกับ $6^2 + 8^2 = 100$ ได้ $10^2 = 100$, $9^2 = 81 < 100$ และ $11^2 = 121 > 100$ ตามลำดับ

ตอบ มุมฉาก มุมแหลม และมุมป้าน ตามลำดับ

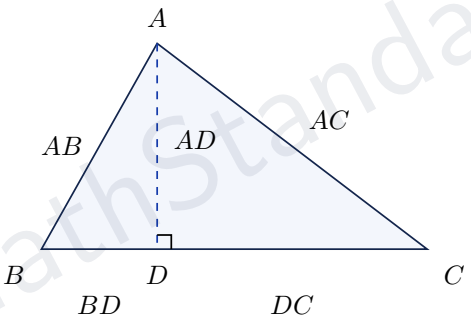
ตัวอย่าง 7 ด้านสองด้านยาว $5, 9$ หน่วย ถ้าด้านที่สามเป็นจำนวนเต็ม จะเป็นไปได้กี่ค่า

วิธีคิด ให้ด้านที่สามเป็น x จะได้ $9 - 5 < x < 9 + 5$ หรือ $4 < x < 14$ จำนวนเต็มที่เป็นไปได้คือ $5, 6, \ldots, 13$ รวม 9 ค่า

ตอบ 9 ค่า

1.7 การแยกรูปเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

สามเหลี่ยมใหญ่ไม่จำเป็นต้องเป็นมุมฉาก หากลากเส้นตั้งฉากแบ่งรูปออกเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากได้ ก็ใช้ทฤษฎีบทกับแต่ละรูปย่อยได้ โดยระบุด้านตรงข้ามมุมฉากใหม่ในแต่ละรูป



สามเหลี่ยม ABD และ ACD มีมุมฉากที่ D และใช้ AD ร่วมกัน

คำนวณจากรูปแรกแล้วเชื่อมไปยังรูปที่สอง

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

ความยาว AB เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปแรก ส่วน AC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปที่สอง

ตัวอย่าง 8 สามเหลี่ยม ABC มี $AD \perp BC$ โดย D อยู่ระหว่าง B, C ถ้า $AB = 13$, $BD = 5$, $DC = 16$ หน่วย จงหา AC

วิธีคิด ใช้สามเหลี่ยม ABD ก่อน ได้

$$AD^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$

จากนั้นใช้สามเหลี่ยม ACD ได้ $AC^2 = 144 + 16^2 = 400$ จึงมี $AC = 20$

ตอบ 20 หน่วย

ถ้าขั้นต่อไปใช้เพียงกำลังสองของความยาว สามารถเก็บค่า AD^2 ไว้แทนได้โดยตรง

เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 แผ่นป้ายรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านประกอบมุมฉากยาว 20 และ 21 เซนติเมตร จงหาความยาวด้านที่เหลือ

ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 โครงค้ำรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 2.5 เมตร และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 0.7 เมตร จงหาความยาวอีกด้านหนึ่ง

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีความยาวด้าน $9,\ 12$ และ $\sqrt{k}$ หน่วย โดย $\sqrt{k}$ เป็นด้านที่ยาวที่สุด จงหา k

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 สามเหลี่ยม ABC มี $C = 90^\circ$ และด้าน $a = BC = 7$, $b = CA = 24$ หน่วย จงหา $c = AB$

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	29 เซนติเมตร
2	2.4 เมตร
3	225
4	25 หน่วย
5	8 หน่วย
6	$2\sqrt{7}$ หน่วย
7	3
8	12
9	เฉพาะชุด $(9, 12, 15)$ ส่วนชุด $(5, 7, 13)$ สร้างสามเหลี่ยมไม่ได้
10	$x = 8$ และความยาวรอบรูป 40 หน่วย
11	$(6, 8, 9)$ และ $(7, 8, 10)$ รวม 2 รูป
12	25 หน่วย
13	$BC = 20$ และ $DC = 10$ หน่วย
14	15 ค่า
15	84 เซนติเมตร
16	8 เมตร
17	180 ตารางหน่วย และ 41 หน่วย
18	24 หน่วย และ 120 ตารางหน่วย
19	68 เซนติเมตร
20	34 เซนติเมตร

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

ข้อ 1 ให้ c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก จะได้ $c^2 = 20^2 + 21^2 = 841$ ดังนั้น $c = 29$

ตอบ 29 เซนติเมตร

ข้อ 2 ให้ x เป็นความยาวที่ต้องการ จาก $x^2 + 0.7^2 = 2.5^2$ ได้ $x^2 = 6.25 - 0.49 = 5.76$ จึงได้ $x = 2.4$

ตอบ 2.4 เมตร

ข้อ 3 ด้านที่ยาวที่สุดคือด้านตรงข้ามมุมฉาก จึงได้ $(\sqrt{k})^2 = 9^2 + 12^2 = 225$ ดังนั้น $k = 225$

ตอบ 225

ข้อ 4 ด้าน c อยู่ตรงข้ามมุมฉาก C จึงมี $c^2 = 7^2 + 24^2 = 625$ เลือกความยาวบวกได้ $c = 25$

ตอบ 25 หน่วย

ข้อ 5 ให้ด้านที่ถามยาว $x > 0$ หน่วย จาก $x^2 + 3^2 = 73$ ได้ $x^2 = 64$ จึงมี $x = 8$

ตอบ 8 หน่วย

ข้อ 6 $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 100 - 72 = 28$ จึงได้ $AB = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

ตอบ $2\sqrt{7}$ หน่วย

ข้อ 7 $(8x)^2 + (15x)^2 = 51^2$ ทำให้ $289x^2 = 2601$ และ $x^2 = 9$ เนื่องจาก $x > 0$ จึงได้ $x = 3$

ตอบ 3

ข้อ 8 $16^2 + x^2 = (x + 8)^2$ เมื่อกระจายกำลังสองและลบ x^2 ทั้งสองข้าง ได้ $256 = 16x + 64$ จึงได้ $x = 12$

ตอบ 12

ข้อ 9 ชุดแรกมี $9 + 12 > 15$ และ $9^2 + 12^2 = 15^2$ จึงเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ชุดหลังมี $5 + 7 < 13$ จึงไม่ผ่านอสมการสามเหลี่ยม

ตอบ เฉพาะชุด $(9, 12, 15)$ ส่วนชุด $(5, 7, 13)$ สร้างสามเหลี่ยมไม่ได้

ข้อ 10 ใช้ $225 + x^2 = (x + 9)^2 = x^2 + 18x + 81$ จึงได้ $x = 8$ ด้านฉากยาว 17 หน่วย ความยาวรอบรูปเป็น $15 + 8 + 17 = 40$

ตอบ $x = 8$ และความยาวรอบรูป 40 หน่วย

ข้อ 11 ทุกชุดมีผลบวกด้านสั้นสองด้านมากกว่าด้านยาวที่สุด เปรียบเทียบกำลังสองได้ $9^2 < 6^2 + 8^2$, $13^2 = 5^2 + 12^2$, $8^2 > 4^2 + 5^2$ และ $10^2 < 7^2 + 8^2$ จึงเป็นมุมแหลมเฉพาะชุดที่หนึ่งและสี่

ตอบ $(6, 8, 9)$ และ $(7, 8, 10)$ รวม 2 รูป