MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง สมการกำลังสอง

www.mathstandard.com

เรื่อง สมการกำลังสอง

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง สมการกำลังสอง ครอบคลุม รูปมาตรฐาน วิธีแก้สมการ จำนวนราก ความสัมพันธ์ระหว่างรากกับสัมประสิทธิ์ สมการเศษส่วน และการลดรูปสมการเป็นสมการกำลังสอง เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ การแยกตัวประกอบ เศษส่วน กรณฑ์ และสมการเชิงเส้น

ขอบเขตและข้อตกลง

- ตัวแปรและสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น สมการกำลังสองต้องมีสัมประสิทธิ์กำลังสองไม่เป็นศูนย์หลังจัดรูป
- คำว่า จำนวนคำตอบ หมายถึงจำนวนค่าที่แตกต่างกัน หากให้นับรากซ้ำตามจำนวนครั้งที่เกิดจะระบุไว้ในคำถามหรือข้อกำหนดของสูตร
- ตัวส่วนและตัวหารต้องไม่เป็นศูนย์ เงื่อนไขจากนิพจน์เดิมยังคงใช้หลังการตัดทอน ต้องตรวจคำตอบก่อนสรุป
- คำตอบใช้ค่าที่แน่นอนในรูปเศษส่วนอย่างต่ำหรือกรณฑ์อย่างง่าย ระบุหน่วยของปริมาณและเลือกค่าตามเงื่อนไขสถานการณ์
- ความสัมพันธ์ของรากสมการดีกรีสูงเป็นส่วนขยาย ในเอกสารนี้ใช้กับสมการที่มีรากจริงครบตามดีกรีเมื่อนับรากซ้ำ โดยแสดงหรือกำหนดเงื่อนไขไว้

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

เรื่อง สมการกำลังสอง

สารบัญ

ตอนที่ 1 รูปมาตรฐานและการแยกตัวประกอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–14 8

ตอนที่ 2 การถอดรากและสูตรสมการกำลังสอง

เนื้อหาและตัวอย่าง 16

แบบฝึกหัดข้อ 15–28 19

ตอนที่ 3 จำนวนคำตอบและพารามิเตอร์

เนื้อหาและตัวอย่าง 27

แบบฝึกหัดข้อ 29–42 31

ตอนที่ 4 ความสัมพันธ์ของรากสมการกำลังสอง

เนื้อหาและตัวอย่าง 39

แบบฝึกหัดข้อ 43–56 43

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง สมการกำลังสอง

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 สมการเศษส่วนและการแทนอัตราส่วน

เนื้อหาและตัวอย่าง 52

แบบฝึกหัดข้อ 57–70 55

ตอนที่ 6 โจทย์ประยุกต์สมการกำลังสอง

เนื้อหาและตัวอย่าง 63

แบบฝึกหัดข้อ 71–84 67

ตอนที่ 7 สมการดีกรีสูงที่ลดรูปได้

เนื้อหาและตัวอย่าง 74

แบบฝึกหัดข้อ 85–98 77

ตอนที่ 8 ความสัมพันธ์ของรากสมการดีกรีสูง

เนื้อหาและตัวอย่าง 85

แบบฝึกหัดข้อ 99–112 92

สรุปเนื้อหา เรื่อง สมการกำลังสอง 100

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 113–132 107

เฉลยคำตอบ 117

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 123

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

รูปมาตรฐานและการแยกตัวประกอบ

1.1 รูปมาตรฐานและสัมประสิทธิ์

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

x เป็นตัวแปร a,b,c เป็นค่าคงตัวจริง ต้องจัดรูปและรวมพจน์คล้ายก่อนระบุ a,b,c โดยรวมเครื่องหมายของแต่ละพจน์ด้วย

ถ้าสัมประสิทธิ์ของ x^2 หลังจัดรูปเป็นศูนย์ สมการนั้นไม่เป็นสมการกำลังสอง การคูณหรือหารทั้งสมการด้วยค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์ไม่เปลี่ยนคำตอบ

ตัวอย่าง 1 จงระบุสัมประสิทธิ์ของ $5x^2-3x=8$

วิธีคิด ลบ 8 ทั้งสองข้าง ได้ $5x^2-3x-8=0$ ดังนั้นพจน์คงตัวมีเครื่องหมายลบ

ตอบ $a=5,\ b=-3,\ c=-8$

ตัวอย่าง 2 จงพิจารณาว่า $x(x+2)=x^2+7$ เป็นสมการกำลังสองหรือไม่

วิธีคิด กระจายพจน์ซ้ายแล้วลบ x^2 ทั้งสองข้าง ได้ $2x=7$ พจน์กำลังสองหักล้างกันทั้งหมด

ตอบ ไม่เป็นสมการกำลังสอง

1.2 คำตอบและการตรวจคำตอบ

จำนวนจริง r เป็นคำตอบของสมการเมื่อแทน $x=r$ แล้วทำให้ทั้งสองข้างเท่ากัน การแทนค่าตรวจว่าค่าหนึ่งเป็นคำตอบ ไม่ได้ยืนยันว่าหาคำตอบครบทุกค่าแล้ว

ตัวอย่าง 3 ในจำนวน $-1,2,3$ จำนวนใดเป็นคำตอบของ $x^2-2x-3=0$

วิธีคิด แทนค่าทีละจำนวนลงในข้างซ้าย

$$\begin{aligned} x=-1:&\quad 1+2-3=0\\ x=2:&\quad 4-4-3=-3\\ x=3:&\quad 9-6-3=0 \end{aligned}$$

ค่าที่ทำให้ข้างซ้ายเป็นศูนย์คือ -1 และ 3

ตอบ $-1,3$

1.3 สมบัติผลคูณเป็นศูนย์

จัดข้างหนึ่งให้เป็นศูนย์ก่อนแยกตัวประกอบ

$$AB = 0 \quad \iff \quad A = 0 \text{ หรือ } B = 0$$

A, B แทนนิพจน์จำนวนจริง ห้ามหารทั้งสมการด้วยนิพจน์ที่อาจเป็นศูนย์โดยไม่แยกกรณี เพราะอาจทำให้คำตอบหาย

ตัวอย่าง 4 จงแก้สมการ $4x^2 - 20x = 0$

วิธีคิด ดึงตัวร่วมได้ $4x(x-5) = 0$ จึง $x = 0$ หรือ $x = 5$ หากหารสมการด้วย x ตั้งแต่ต้นจะทำให้กรณี $x = 0$ สูญหาย

ตอบ $0, 5$

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.4 การแยกตัวประกอบ

เลือกรูปที่ตรงกับพหุนาม

$$x^2+(m+n)x+mn=(x+m)(x+n)$$

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$$

m,n เป็นค่าคงตัว ส่วน A,B แทนนิพจน์ เมื่อสัมประสิทธิ์นำไม่เป็นหนึ่ง ให้ตรวจตัวประกอบร่วมและวิธีแยกพจน์กลาง

ตัวอย่าง 5 จงแก้สมการ $x^2-2x-15=0$

วิธีคิด ต้องการจำนวนสองจำนวนที่มีผลบวก -2 และผลคูณ -15 คือ $-5,3$ จึงได้

$$(x-5)(x+3)=0$$

แยกพิจารณา $x-5=0$ หรือ $x+3=0$

ตอบ $-3,5$

ตัวอย่าง 6 จงแก้สมการ $4x^2-25=0$

วิธีคิด เขียนเป็นผลต่างกำลังสอง

$$(2x)^2-5^2=(2x-5)(2x+5)=0$$

ได้ $2x=5$ หรือ $2x=-5$

ตอบ $-\frac{5}{2},\frac{5}{2}$

ตัวอย่าง 7 จงแก้สมการ $6x^2+x-2=0$

วิธีคิด ผลคูณ $ac=6(-2)=-12$ ต้องการจำนวนที่บวกกันได้ 1 และคูณกันได้ -12 คือ $4,-3$

$$\begin{aligned}6x^2+x-2&=6x^2+4x-3x-2\\&=2x(3x+2)-(3x+2)\\&=(3x+2)(2x-1)\end{aligned}$$

จึง $3x+2=0$ หรือ $2x-1=0$

ตอบ $-\frac{2}{3},\frac{1}{2}$

1.5 รากซ้ำและจำนวนคำตอบที่แตกต่างกัน

กำลังสองเป็นศูนย์

$$(x-r)^2=0 \quad \iff \quad x=r$$

r เป็นค่าคงตัวจริง ตัวประกอบ $x-r$ เกิดสองครั้ง จึงเรียกว่ารากซ้ำ แต่มีคำตอบที่แตกต่างกันเพียงหนึ่งค่า

ตัวอย่าง 8 จงหาคำตอบของ $2x^2-16x+32=0$

วิธีคิด หารด้วย 2 ได้ $x^2-8x+16=0$ หรือ $(x-4)^2=0$ จึงต้องมี $x-4=0$

ตอบ $x=4$ มีคำตอบที่แตกต่างกัน 1 ค่า

สรุป

จัดรูปมาตรฐานก่อนอ่านสัมประสิทธิ์ แยกตัวประกอบโดยให้ข้างหนึ่งเป็นศูนย์ ระวังการหารด้วยตัวแปร และแยกจำนวนคำตอบที่แตกต่างกันออกจากจำนวนรากเมื่อนับซ้ำ

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง สมการกำลังสอง | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 จงจัดสมการ $3x(x-2)=x+5$ ให้อยู่ในรูป $ax^2+bx+c=0$ และระบุ a,b,c

ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 ในจำนวน $-2,0,3$ จำนวนใดเป็นคำตอบของ $x^2-x-6=0$

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง สมการกำลังสอง | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 จงหาคำตอบจริงทั้งหมดของ $4x^2 = 196$

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 จงหาคำตอบจริงทั้งหมดของ $6x^2 - 42x = 0$

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง สมการกำลังสอง

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	$a=3,\ b=-7,\ c=-5$
2	$-2,\ 3$
3	$-7,\ 7$
4	$0,\ 7$
5	ไม่เป็นสมการกำลังสอง
6	$x=-2,7$
7	-8
8	3
9	5
10	$x=2,3$
11	$-\frac{1}{3},\ \frac{5}{2}$
12	$k=3$ และคำตอบอีกค่าคือ -5
13	ขาดคำตอบ $x=0$ คำตอบครบคือ $x=0,6$
14	กว้าง 5 เมตร ยาว 7 เมตร
15	$4+\sqrt{13}$
16	$x=\frac{2}{3}$ มี 1 ค่า
17	$x=3-2\sqrt{5},3+2\sqrt{5}$
18	ไม่มีคำตอบจริง
19	$-3-\sqrt{11},\ -3+\sqrt{11}$
20	$3-\frac{\sqrt{26}}{2},\ 3+\frac{\sqrt{26}}{2}$
21	$\frac{-3+\sqrt{41}}{4}$
22	$x=2-\sqrt{5},2+\sqrt{5}$

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 รูปมาตรฐานและการแยกตัวประกอบ

ข้อ 1 กระจายและย้ายข้างได้ $3x^2-6x-x-5=0$ หรือ $3x^2-7x-5=0$ จึงอ่านสัมประสิทธิ์โดยรวมเครื่องหมายของแต่ละพจน์

ตอบ $a=3,\ b=-7,\ c=-5$

ข้อ 2 แทนค่าได้ $(-2)^2-(-2)-6=0$, $0^2-0-6=-6$ และ $3^2-3-6=0$ จึงมีสองค่าที่ทำให้สมการเป็นจริง

ตอบ $-2,\ 3$

ข้อ 3 หารทั้งสองข้างด้วย 4 ได้ $x^2=49$ จึง $x=7$ หรือ $x=-7$

ตอบ $-7,\ 7$

ข้อ 4 ดึงตัวร่วมได้ $6x(x-7)=0$ จึง $x=0$ หรือ $x-7=0$ โดยไม่หารสมการด้วย x

ตอบ $0,\ 7$

ข้อ 5 กระจายแล้วตัดพจน์ $2x^2$ ทั้งสองข้าง เหลือ $6x-5=0$ ซึ่งมีดีกรีหนึ่ง

ตอบ ไม่เป็นสมการกำลังสอง

ข้อ 6 จัดเป็น $x^2-5x-14=(x-7)(x+2)=0$ แล้วแยกสองกรณี

ตอบ $x=-2,7$

ข้อ 7 แยกตัวประกอบได้ $(x+8)(x-3)=0$ จึงมีคำตอบ $-8,3$

ตอบ -8

ข้อ 8 หารด้วย 3 ได้ $x^2+4x-21=0$ และแยกเป็น $(x+7)(x-3)=0$ จึงมีคำตอบ $-7,3$

ตอบ 3

ข้อ 9 หารด้วย 2 ได้ $(x-5)(x-8)=0$ จึงมีคำตอบ $5,8$

ตอบ 5

ข้อ 10 หารด้วย 3 แล้วแยก $(x-2)(x-3)=0$

ตอบ $x=2,3$

ข้อ 11 แยกพจน์กลางเป็น $6x^2-15x+2x-5=0$ แล้วจัดกลุ่มได้ $(3x+1)(2x-5)=0$

ตอบ $-\frac{1}{3},\ \frac{5}{2}$

ข้อ 12 แทน $x=2$ ได้ $4+2k-10=0$ จึงมี $k=3$ สมการเป็น $(x-2)(x+5)=0$

ตอบ $k=3$ และคำตอบอีกค่าคือ -5