MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง จำนวนจริง

www.mathstandard.com

เรื่อง จำนวนจริง

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง จำนวนจริง ครอบคลุม ชนิดของจำนวนจริง ทศนิยมซ้ำ สมบัติของการดำเนินการ อสมการ ค่าสัมบูรณ์ และกรณฑ์ เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ จำนวนเต็ม เศษส่วน เลขยกกำลัง และสมการเชิงเส้น

ขอบเขตและข้อตกลง

- พิจารณาค่าของนิพจน์และคำตอบในระบบจำนวนจริง เว้นแต่ระบุเงื่อนไขเป็นจำนวนเต็ม จำนวนนับ หรือจำนวนเฉพาะ
- $\mathbb{N}$ เริ่มที่ 1 และ $\sqrt{a}$ แทนรากที่สองที่ไม่เป็นลบของ $a \geq 0$ จึงมี $\sqrt{x^2} = |x|$
- ตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์ และกรณฑ์อันดับคู่ในตัวส่วนต้องมีค่ามากกว่าศูนย์
- คำตอบเศษส่วนใช้รูปอย่างต่ำ ค่ากรณฑ์ใช้รูปอย่างง่ายโดยคงค่าที่แน่นอน ระบุหน่วยของปริมาณ และแสดงเหตุผลเมื่อคำถามกำหนด
- กรณฑ์ซ้อนต่อเนื่องพิจารณาเฉพาะแบบรูปที่กำหนดให้มีค่าจริงแน่นอนและเป็นบวก การแทนส่วนที่ซ้ำต้องรักษาทั้งอันดับรากและเครื่องหมาย

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง จำนวนจริง

สารบัญ

ตอนที่ 1 จำนวนจริงและทศนิยมซ้ำ

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–16 9

ตอนที่ 2 สมบัติ อสมการ และค่าสัมบูรณ์

เนื้อหาและตัวอย่าง 18

แบบฝึกหัดข้อ 17–32 22

ตอนที่ 3 รากและการดำเนินการของกรณฑ์

เนื้อหาและตัวอย่าง 31

แบบฝึกหัดข้อ 33–46 35

ตอนที่ 4 คู่สังยุคและการทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์

เนื้อหาและตัวอย่าง 43

แบบฝึกหัดข้อ 47–62 47

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง จำนวนจริง

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 การจัดรูปกรณฑ์ซ้อน

เนื้อหาและตัวอย่าง 56

แบบฝึกหัดข้อ 63–76 59

ตอนที่ 6 สมการที่มีกรณฑ์

เนื้อหาและตัวอย่าง 67

แบบฝึกหัดข้อ 77–92 72

ตอนที่ 7 การดำเนินการที่นิยามขึ้น

เนื้อหาและตัวอย่าง 81

แบบฝึกหัดข้อ 93–106 84

ตอนที่ 8 เศษส่วน การหักล้าง และกรณฑ์อนันต์

เนื้อหาและตัวอย่าง 93

แบบฝึกหัดข้อ 107–124 99

สรุปเนื้อหา เรื่อง จำนวนจริง 109

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 125–144 115

เฉลยคำตอบ 125

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 132

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

จำนวนจริงและทศนิยมซ้ำ

1.1 ชนิดของจำนวนจริง

จำนวนจริงแทนตำแหน่งบนเส้นจำนวน แบ่งเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ ซึ่งไม่ซ้ำกัน

กลุ่มจำนวนที่ใช้

กลุ่มจำนวน	ความหมายหรือรูปทั่วไป
จำนวนนับ $\mathbb{N}$	$1, 2, 3, \ldots$
จำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$	$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
จำนวนตรรกยะ $\mathbb{Q}$	$\frac{p}{q}$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเต็ม และ $q \neq 0$
จำนวนอตรรกยะ	จำนวนจริงที่เขียนในรูปข้างต้นไม่ได้

ในเอกสารนี้จำนวนนับเริ่มที่ 1 และจำนวนจริงใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{R}$



จำนวนนับทุกจำนวนเป็นจำนวนเต็ม จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นตรรกยะ เพราะเขียนเป็นเศษส่วนที่มีตัวส่วน 1 ได้ การจำแนกให้พิจารณาค่าหลังจัดรูป เช่น การมีเครื่องหมายกรณฑ์ไม่ได้แสดงว่าเป็นอตรรกยะเสมอ

ตัวอย่าง 1 จงจำแนก $\sqrt{36}$ และ $\sqrt{10}$

วิธีคิด $\sqrt{36} = 6$ จึงเป็นจำนวนนับ จำนวนเต็ม และจำนวนตรรกยะ ส่วน 10 ไม่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ จึงมี $\sqrt{10}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ตอบ $\sqrt{36}$ เป็นตรรกยะ และ $\sqrt{10}$ เป็นอตรรกยะ

1.2 ทศนิยมและสมบัติของจำนวนตรรกยะ

จำแนกจากรูปทศนิยม

รูปทศนิยม	ตัวอย่าง	ชนิดของจำนวน
สิ้นสุด	$0.625 = \frac{5}{8}$	ตรรกยะ
ไม่สิ้นสุดและซ้ำเป็นคาบ	$0.\overline{27} = 0.272727\ldots$	ตรรกยะ
ไม่สิ้นสุดและไม่ซ้ำเป็นคาบ	$\sqrt{2} = 1.414213\ldots$	อตรรกยะ

ขีดบนเลขโดดระบุชุดที่ซ้ำต่อไปตลอด การมีจุดไข่ปลาอย่างเดียวไม่เพียงพอสำหรับสรุปว่าเป็นทศนิยมซ้ำ

ตัวอย่าง 2 จงจำแนก 1.375 และ $0.\overline{18}$

วิธีคิด $1.375 = \frac{1375}{1000} = \frac{11}{8}$ ส่วน $0.\overline{18} = 0.181818\ldots$ เป็นทศนิยมซ้ำ จึงเขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มได้เช่นกัน

ตอบ ทั้งสองจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ

ผลของการดำเนินการ

ให้ r, s เป็นจำนวนตรรกยะ และ u เป็นจำนวนอตรรกยะ

$$r+s,\ r-s,\ rs \text{ เป็นตรรกยะ}, \qquad \frac{r}{s} \text{ เป็นตรรกยะเมื่อ } s \neq 0$$

$r+u$ และ $r-u$ เป็นอตรรกยะ ส่วน ru เป็นอตรรกยะเมื่อ $r \neq 0$

ถ้า $r+u$ เป็นตรรกยะ เมื่อลบ r ออกจะทำให้ u เป็นตรรกยะ ซึ่งขัดกับเงื่อนไขเดิม ผลบวกหรือผลคูณของอตรรกยะสองจำนวนจึงต้องพิจารณาเป็นกรณี ไม่มีกฎว่าจะเป็นอตรรกยะเสมอ

ตัวอย่าง 3 ผลคูณของจำนวนอตรรกยะสองจำนวนเป็นอตรรกยะเสมอหรือไม่

วิธีคิด เลือก $\sqrt{2}$ กับ $\sqrt{2}$ จะได้ผลคูณ 2 ซึ่งเป็นตรรกยะ แต่ $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ เป็นอตรรกยะ จึงไม่สามารถระบุชนิดจากตัวประกอบสองตัวเพียงอย่างเดียว

ตอบ ไม่จริงเสมอ

MathStandard

1.3 การเปลี่ยนทศนิยมซ้ำเป็นเศษส่วน

กำหนดตัวแปรแทนทศนิยม แล้วคูณด้วยกำลังของ 10 เพื่อให้ส่วนซ้ำตรงกัน เมื่อลบสมการ ส่วนซ้ำจะหักล้างกัน

ส่วนซ้ำเริ่มถัดจากจุดทศนิยม

ถ้าชุดซ้ำมี n หลัก ตัวส่วนก่อนย่อเท่ากับ $10^n - 1$ เช่น $9, 99, 999$ ตามลำดับ

$$0.\overline{abc} = \frac{100a + 10b + c}{999}$$

a, b, c ในสูตรนี้เป็นเลขโดดของชุดซ้ำสามหลัก ไม่ใช่ผลคูณ abc

ตัวอย่าง 4 จงเขียน $0.\overline{54}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

วิธีคิด ให้ $x = 0.\overline{54}$ จึงมี

$$100x = 54.545454\ldots$$

$$x = \ \ 0.545454\ldots$$

$$99x = 54$$

ดังนั้น $x = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$

ตอบ $\frac{6}{11}$

ตัวอย่าง 5 จงเขียน $3.\overline{8}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

วิธีคิด ให้ $x = 3.8888\ldots$ จะได้ $10x = 38.8888\ldots$ ลบกันได้ $9x = 35$ ดังนั้น $x = \frac{35}{9}$

ตอบ $\frac{35}{9}$

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.4 ส่วนไม่ซ้ำก่อนส่วนซ้ำ

หลักการเลื่อนจุดทศนิยมสองครั้ง

ถ้ามีหลักทศนิยมที่ไม่ซ้ำ m หลัก และชุดซ้ำ n หลัก ให้เปรียบเทียบ $10^{m+n}x$ กับ $10^m x$

$$x = \frac{M - N}{10^m(10^n - 1)}$$

M คือจำนวนเต็มที่ได้จากการเขียนถึงชุดซ้ำแรกแล้วตัดจุดทศนิยมออก ส่วน N คือจำนวนเต็มที่ได้จากการเขียนถึงตำแหน่งก่อนชุดซ้ำแล้วตัดจุดทศนิยมออก

ตัวส่วนมีเลข 9 จำนวน n ตัว ตามด้วยเลข 0 จำนวน m ตัว โดยไม่นับหลักของส่วนจำนวนเต็มใน m ควรเขียนสมการประกอบก่อนใช้สูตร และย่อเศษส่วนก่อนอ่านค่าเศษหรือตัวส่วน

ตัวอย่าง 6 จงเขียน $0.2\overline{7}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

วิธีคิด ให้ $x = 0.2777\ldots$ จะได้

$$10x = 2.777\ldots, \qquad 100x = 27.777\ldots$$

ลบสมการได้ $90x = 25$ ดังนั้น $x = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$

ตอบ $\frac{5}{18}$

ตัวอย่าง 7 จงเขียน $2.13\overline{6}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

วิธีคิด ให้ $x = 2.13666\ldots$ ได้ $100x = 213.666\ldots$ และ $1000x = 2136.666\ldots$ ดังนั้น

$$900x = 2136 - 213 = 1923, \qquad x = \frac{641}{300}$$

ตอบ $\frac{641}{300}$

MathStandard

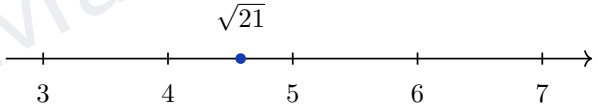
1.5 การประมาณรากและเงื่อนไขจำนวนเต็ม

ใช้กำลังสองสมบูรณ์กำหนดขอบเขต

ให้ m เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ และ $a > 0$

$$m^2 < a < (m+1)^2 \quad \Longrightarrow \quad m < \sqrt{a} < m+1$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก k จำนวน $\sqrt{k}$ เป็นตรรกยะก็ต่อเมื่อ k เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งมีเลขชี้กำลังของตัวประกอบเฉพาะทุกตัวเป็นจำนวนคู่



ตัวอย่าง 8 จงระบุจำนวนเต็มสองจำนวนที่อยู่ติดกันและมี $\sqrt{21}$ อยู่ระหว่างกลาง

วิธีคิด เพราะ $4^2 = 16 < 21 < 25 = 5^2$ จึงมี $4 < \sqrt{21} < 5$

ตอบ 4 และ 5

ตัวอย่าง 9 จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดซึ่งคูณ 72 แล้วได้กำลังสองสมบูรณ์

วิธีคิด แยก $72 = 2^3 \cdot 3^2$ เลขชี้กำลังของ 2 เป็นคี่ จึงต้องคูณเพิ่มด้วย 2 ได้ $72(2) = 144 = 12^2$

ตอบ 2

การนับจำนวนเต็มในช่วงต้องตรวจการรวมจุดปลาย เช่น $-1 < x < 3$ ให้ $0, 1, 2$ ส่วน $-1 \leq x \leq 3$ รวม -1 และ 3 เพิ่มด้วย

สรุป

จำแนกจากค่าของจำนวนและรูปทศนิยม เปลี่ยนทศนิยมซ้ำโดยจัดส่วนซ้ำให้ตรงกันแล้วลบสมการ การประมาณรากและเงื่อนไขกำลังสองใช้กำลังสองสมบูรณ์และตัวประกอบเฉพาะ

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง จำนวนจริง | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 พิจารณาจำนวน $-6, 0, \frac{7}{4}, \sqrt{49}, -\sqrt{16}, \sqrt{12}, 0.\overline{3}, \pi$ จงระบุจำนวนที่เป็นจำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ

ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 ในรายการ $\sqrt{9}, \frac{6}{2}, 3.0, 0.\overline{3}, 1, \sqrt{2}$ มีจำนวนจริงที่มีค่าแตกต่างกันกี่จำนวน

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง จำนวนจริง | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 จงหาจำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่งไม่เกิน $\sqrt{115}$

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 จงเขียน $2.\overline{7}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง จำนวนจริง

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	จำนวนเต็ม $-6, 0, 7, -4$ ตรรกยะ $-6, 0, \frac{7}{4}, 7, -4, \frac{1}{3}$ อตรรกยะ $2\sqrt{3}, \pi$
2	4 จำนวน
3	10
4	$\frac{25}{9}$
5	$\frac{14}{33}$
6	$\frac{3}{8}$
7	5 จำนวน
8	8 จำนวน
9	7
10	$\frac{37}{30}$
11	$\frac{13}{150}$
12	(ก) จริง (ข) ไม่จริงเสมอ (ค) จริง
13	15
14	46
15	$\frac{7}{66}$
16	$\frac{1}{6}$ เมตร
17	3700
18	$x \geq -5$
19	$x = -13, 5$
20	$\frac{5}{2}$ และ $-\frac{2}{5}$ ตามลำดับ

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 จำนวนจริงและทศนิยมซ้ำ

ข้อ 1 จัดรูป $\sqrt{49}=7$, $-\sqrt{16}=-4$ และ $0.\overline{3}=\frac{1}{3}$ จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ ส่วน $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ และ π เป็นจำนวนอตรรกยะ

ตอบ จำนวนเต็ม $-6, 0, 7, -4$

ตรรกยะ $-6, 0, \frac{7}{4}, 7, -4, \frac{1}{3}$

อตรรกยะ $2\sqrt{3}, \pi$

ข้อ 2 สามจำนวนแรกมีค่าเท่ากับ 3 ส่วน $0.\overline{3}=\frac{1}{3}$ จึงมีค่าที่แตกต่างกันคือ $3, \frac{1}{3}, 1, \sqrt{2}$

ตอบ 4 จำนวน

ข้อ 3 เนื่องจาก $10^2=100<115<121=11^2$ จึงมี $10<\sqrt{115}<11$

ตอบ 10

ข้อ 4 ให้ $x=2.\overline{7}$ จะได้ $10x=27.\overline{7}$ ลบกันได้ $9x=25$ ดังนั้น $x=\frac{25}{9}$

ตอบ $\frac{25}{9}$

ข้อ 5 ให้ $x=0.\overline{42}$ จะได้ $100x-x=42$ จึงมี $x=\frac{42}{99}=\frac{14}{33}$

ตอบ $\frac{14}{33}$

ข้อ 6 เขียน $0.375=\frac{375}{1000}$ แล้วหารทั้งเศษและส่วนด้วย 125

ตอบ $\frac{3}{8}$

ข้อ 7 สำหรับจำนวนเต็มบวก k รากที่สองเป็นตรรกยะก็ต่อเมื่อ k เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ในช่วงนี้มี $16, 25, 36, 49, 64$

ตอบ 5 จำนวน

ข้อ 8 จาก $-\frac{17}{4}=-4.25$ และ $\frac{11}{3}=3+\frac{2}{3}$ ได้ $n=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3$

ตอบ 8 จำนวน

ข้อ 9 ย่อ $\frac{18}{42}=\frac{3}{7}$ เมื่อ 3 กับ 7 ไม่มีตัวประกอบร่วมที่มากกว่า 1 จึงต้องมี $7 \mid n$ ค่าน้อยที่สุดคือ 7

ตอบ 7

ข้อ 10 ให้ $x=1.2\overline{3}$ จะได้ $10x=12.\overline{3}$ และ $100x=123.\overline{3}$ ลบกันได้ $90x=111$ จึงมี $x=\frac{37}{30}$

ตอบ $\frac{37}{30}$

ข้อ 11 ให้ $x=0.08\overline{6}$ จะได้ $100x=8.\overline{6}$ และ $1000x=86.\overline{6}$ จึงมี $900x=78$ และ $x=\frac{13}{150}$

ตอบ $\frac{13}{150}$