MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง ระบบสมการ

www.mathstandard.com

เรื่อง ระบบสมการ

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง ระบบสมการ ครอบคลุม เส้นตรง ความชัน ระบบสมการเชิงเส้น ระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น และการสร้างแบบจำลองจากสถานการณ์ เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ จำนวนจริง พหุนาม สมการกำลังสอง เศษส่วน กรณฑ์ และพิกัดฉาก

ขอบเขตและข้อตกลง

- ตัวแปรและสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น คำตอบของระบบต้องสอดคล้องกับสมการเดิมทุกสมการพร้อมกัน
- แต่ละสมการเส้นตรงมีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เส้นแนวตั้งไม่มีค่าความชัน จึงต้องพิจารณาแยกจากสูตรความชัน
- การหารด้วยตัวแปรหรือนิพจน์ต้องตรวจว่าไม่เป็นศูนย์ การแทนตัวแปรจากกรณฑ์ต้องกำหนดขอบเขตและตรวจคำตอบหลังแทนกลับ
- ปัญหาสถานการณ์ต้องระบุความหมายและหน่วยของตัวแปร รวมถึงตรวจเงื่อนไขจำนวนเต็ม จำนวนบวก และขอบเขตเลขโดดตามที่กำหนด
- ภาพที่ไม่ระบุพิกัดหรือมาตราส่วนใช้ประกอบแนวคิด ไม่ใช้การวัดจากภาพแทนการคำนวณ เมื่อโจทย์ถามคำตอบทั้งหมดต้องระบุทุกคู่อันดับที่ใช้ได้

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ระบบสมการ

สารบัญ

ตอนที่ 1 เส้นตรง ความชัน และจุดตัดแกน

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–16 9

ตอนที่ 2 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก

เนื้อหาและตัวอย่าง 19

แบบฝึกหัดข้อ 17–40 24

ตอนที่ 3 ความหมายและจำนวนคำตอบของระบบ

เนื้อหาและตัวอย่าง 37

แบบฝึกหัดข้อ 41–52 40

ตอนที่ 4 การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

เนื้อหาและตัวอย่าง 48

แบบฝึกหัดข้อ 53–68 52

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ระบบสมการ

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 ระบบไม่เชิงเส้นและการลดรูป

เนื้อหาและตัวอย่าง 61

แบบฝึกหัดข้อ 69–86 70

ตอนที่ 6 การสร้างระบบสมการจากสถานการณ์

เนื้อหาและตัวอย่าง 80

แบบฝึกหัดข้อ 87–97 84

ตอนที่ 7 การประยุกต์และการให้เหตุผล

เนื้อหาและตัวอย่าง 91

แบบฝึกหัดข้อ 98–108 97

สรุปเนื้อหา เรื่อง ระบบสมการ 104

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 109–128 111

เฉลยคำตอบ 121

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 127

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

เส้นตรง ความชัน และจุดตัดแกน

1.1 คู่อันดับและจุดบนกราฟ

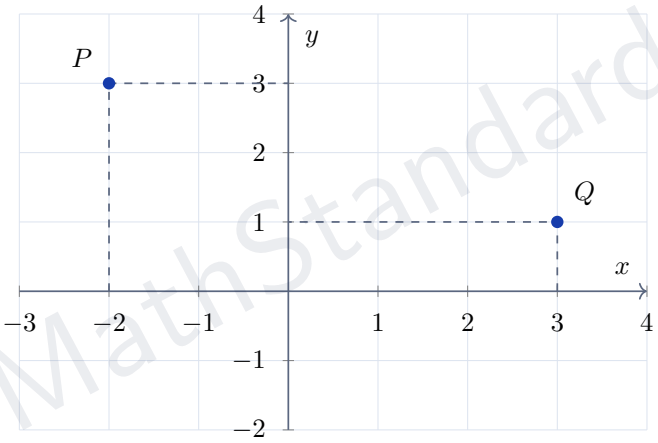
พิกัดและการตรวจสมการ

จุด (u, v) มีพิกัดแนวนอน u และแนวตั้ง v บนแกนที่ตั้งฉากกัน จุดกำเนิดคือ $O(0, 0)$ การสลับพิกัดอาจทำให้ได้คนละจุด

จุด (u, v) อยู่บนกราฟ $Ax + By = C$ ก็ต่อเมื่อ

$$Au + Bv = C$$

A, B, C เป็นค่าคงตัว โดย A, B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จึงเป็นสมการเส้นตรง



จุด $P(-2, 3)$ อยู่ทางซ้าย 2 หน่วยและด้านบน 3 หน่วย ส่วน $Q(3, 1)$ อยู่ทางขวา 3 หน่วยและด้านบน 1 หน่วย

ตัวอย่าง 1 จุด $(2, 1)$ และ $(1, 2)$ จุดใดอยู่บนกราฟ $2x + y = 5$

วิธีคิด แทน $(2, 1)$ ได้ $2(2) + 1 = 5$ จึงอยู่บนกราฟ

แทน $(1, 2)$ ได้ $2(1) + 2 = 4 \neq 5$ จึงไม่อยู่บนกราฟ

ตอบ จุด $(2, 1)$

MathStandard
MathStandard
MathStandard

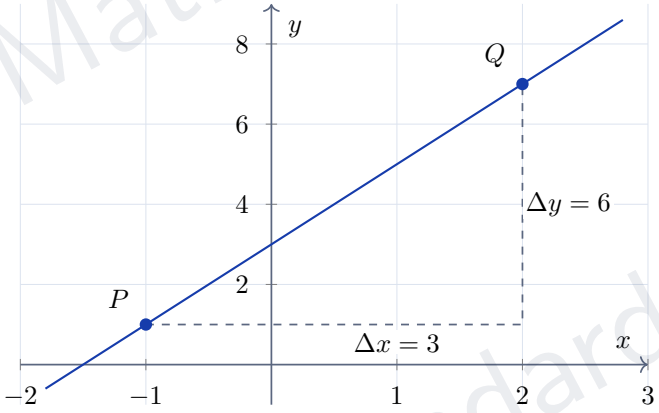
1.2 ความชันของเส้นตรง

อัตราการเปลี่ยนแปลงของพิกัด

ถ้า $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุดต่างกัน และ $x_1 \neq x_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

m คือความชัน $\Delta x = x_2 - x_1$ และ $\Delta y = y_2 - y_1$ เป็นผลต่างพิกัดที่มีเครื่องหมาย ต้องลบในลำดับเดียวกันทั้งเศษและส่วน



จาก $P(-1, 1)$ ไป $Q(2, 7)$ ได้ $\Delta x = 3$ และ $\Delta y = 6$ จึงมีความชัน $m = 2$

ตัวอย่าง 2 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่าน $(-2, 5)$ และ $(4, 2)$

วิธีคิด ใช้สูตร $m = \frac{2-5}{4-(-2)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ ความชันเป็นลบ เพราะเมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่า y ลดลง

ตอบ $-\frac{1}{2}$

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.3 รูปสมการและเครื่องหมายของความชัน

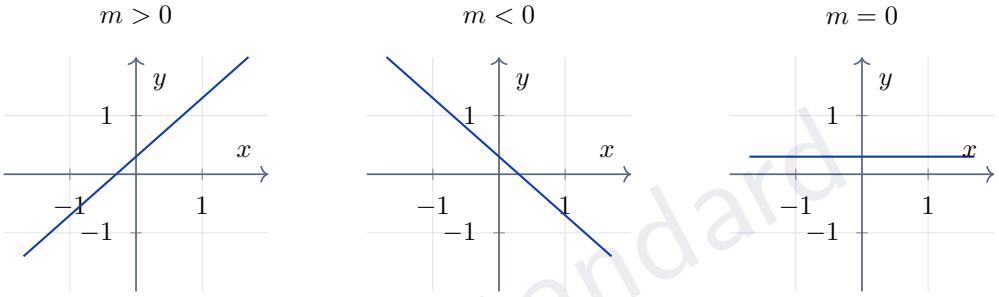
รูปความชันและจุดตัดแกน

$$y = mx + c$$

m คือความชัน และ $(0, c)$ คือจุดตัดแกน y สำหรับ $Ax + By + C = 0$ เมื่อ $B \neq 0$

$$m = -\frac{A}{B}, \qquad c = -\frac{C}{B}$$

$m > 0$ เส้นสูงขึ้นจากซ้ายไปขวา $m < 0$ เส้นต่ำลง และ $m = 0$ เป็นเส้นแนวนอน $y = c$ ส่วนเส้นแนวตั้ง $x = a$ ไม่มีค่าความชัน



ความชันบวก ลบ และศูนย์ตามลำดับ พิจารณาเมื่อพิกัด x เพิ่มขึ้น

ตัวอย่าง 3 จงหาความชันและจุดตัดแกน y ของเส้นตรง $2x + 4y - 8 = 0$

วิธีคิด จัดรูปเป็น $4y = -2x + 8$ จึงได้ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

ตอบ ความชัน $-\frac{1}{2}$ และจุดตัดแกน y คือ $(0, 2)$

MathStandard

1.4 จุดตัดแกนและรูปตัดแกน

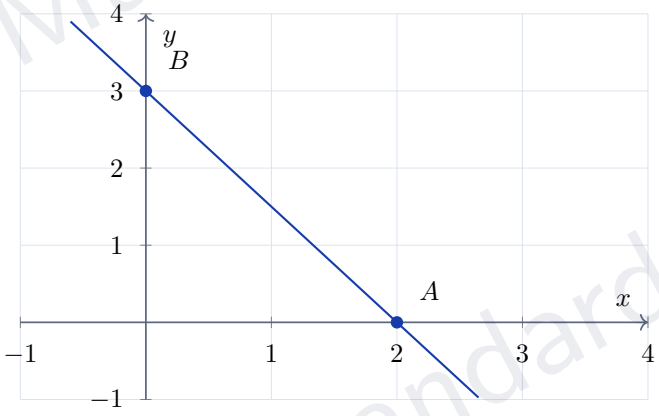
ใช้พิกัดที่เป็นศูนย์บนแกน

จุดตัดแกน x หาโดยแทน $y=0$ จุดตัดแกน y หาโดยแทน $x=0$

ถ้าเส้นตรงตัดแกนที่ $(p,0),(0,q)$ โดย $p,q\neq 0$ เขียนได้เป็น

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

รูปนี้ไม่ใช้กับเส้นผ่านจุดกำเนิด หรือเส้นที่ขนานกับแกนพิกัด ต้องตรวจรูปสมการก่อนเลือกใช้



เส้นตัวอย่าง $3x+2y=6$ ตัดแกนที่ $A(2,0)$ และ $B(0,3)$

ตัวอย่าง 4 จงหาจุดตัดแกนทั้งสองของ $2x+3y=12$ และเขียนสมการในรูปตัดแกน

วิธีคิด แทน $y=0$ ได้ $x=6$ และแทน $x=0$ ได้ $y=4$ จึงหารสมการเดิมด้วย 12 ได้ $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$

ตอบ $(6,0),(0,4)$ และ $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$

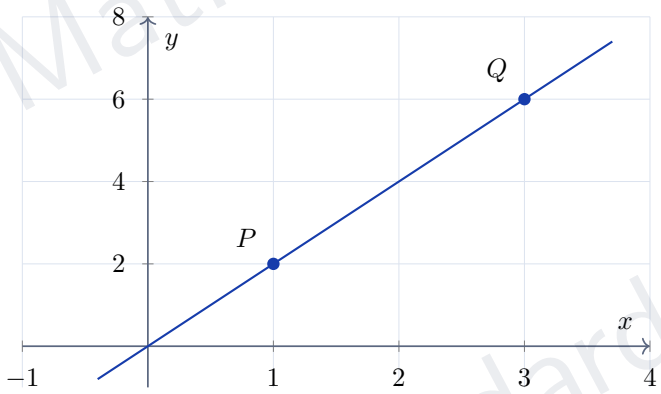
MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.5 การสร้างสมการเส้นตรง

ทราบจุด $P(x_1, y_1)$ และความชัน m

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ถ้าทราบสองจุด ให้หาความชันก่อน เมื่อพิกัดแนวนอนเท่ากันเส้นเป็นแนวตั้ง จึงใช้ $x = x_1$ โดยตรง เมื่อมีค่าคงตัวที่ยังไม่ทราบ ให้แทนพิกัดจุดที่กำหนดลงในสมการ แล้วตรวจสมการหลังหาค่าคงตัว



จุด $P(1, 2)$ และ $Q(3, 6)$ ให้ความชัน 2 จึงได้เส้นตรง $y = 2x$

ตัวอย่าง 5 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่าน $(2, 5)$ และมีความชัน 3

วิธีคิด แทนในรูปจุดและความชัน ได้ $y - 5 = 3(x - 2)$ กระจายเป็น $y - 5 = 3x - 6$ จึง $y = 3x - 1$

ตอบ $y = 3x - 1$

ตัวอย่าง 6 เส้นตรง $x - 2y = k$ ผ่าน $(3, -1)$ จงหาค่า k

วิธีคิด แทนค่าพิกัดในสมการ ได้ $k = 3 - 2(-1) = 5$

ตอบ 5

สรุป

ระบุพิกัดตามลำดับแนวนอนและแนวตั้ง ตรวจจุดด้วยการแทนค่า แยกความชันออกจากจุดตัดแกน และพิจารณาเส้นแนวตั้งก่อนใช้สูตรที่มีผลต่างพิกัดในตัวส่วน

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ระบบสมการ | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 เส้นตรง $3x - 2y = k$ ผ่านจุด $(-2, 4)$ จงหาค่า k

ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 จงหาความชันของเส้นตรง $4x + 3y = 12$

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ระบบสมการ | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 เส้นตรง $2x - 5y = 15$ ตัดแกน y ที่จุด A จงหาพิกัดของ A

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 เส้นตรง $3x + 4y = 18$ ตัดแกน x ที่จุด B จงหาพิกัดของ B

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ระบบสมการ

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	-14
2	$-\frac{4}{3}$
3	$(0,-3)$
4	$(6,0)$
5	$\frac{3}{2}$
6	อยู่บนเส้นตรง
7	$y=-4$ มีความชัน 0 และ $x=3$ ไม่มีค่าความชัน
8	-1
9	$y=\frac{3}{2}x-7$
10	16
11	-2
12	$y=-2x+3$
13	12
14	$a=2$ จุดตัดคือ $(6,0),(0,6)$
15	$(3,5)$
16	102 บาท
17	-3
18	6
19	$\frac{2}{3}$
20	14
21	$y=-3$
22	9

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 เส้นตรง ความชัน และจุดตัดแกน

ข้อ 1 แทนพิกัดที่กำหนดในสมการ ได้ $k = 3(-2) - 2(4) = -14$

ตอบ -14

ข้อ 2 จัดสมการเป็น $3y = -4x + 12$ จึงได้ $y = -\frac{4}{3}x + 4$ ความชันคือสัมประสิทธิ์ของ x

ตอบ $-\frac{4}{3}$

ข้อ 3 บนแกน y มี $x = 0$ จึงได้ $-5y = 15$ หรือ $y = -3$

ตอบ $(0, -3)$

ข้อ 4 บนแกน x มี $y = 0$ จึงได้ $3x = 18$ หรือ $x = 6$

ตอบ $(6, 0)$

ข้อ 5 ความชันเท่ากับ $\frac{10 - 1}{4 - (-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

ตอบ $\frac{3}{2}$

ข้อ 6 แทนพิกัดได้ $2(-1) + 5 = 3$ จึงสอดคล้องกับสมการ

ตอบ อยู่บนเส้นตรง

ข้อ 7 $y = -4$ เป็นแนวนอนจึงมีความชันศูนย์ ส่วน $x = 3$ มีผลต่างพิกัดแนวนอนเป็นศูนย์ จึงหารเพื่อหาความชันไม่ได้

ตอบ $y = -4$ มีความชัน 0 และ $x = 3$ ไม่มีค่าความชัน

ข้อ 8 จาก $\frac{t - 3}{8 - 2} = -\frac{2}{3}$ ได้ $t - 3 = -4$ ดังนั้น $t = -1$

ตอบ -1

ข้อ 9 เขียน $y + 1 = \frac{3}{2}(x - 4)$ แล้วกระจายเป็น $y + 1 = \frac{3}{2}x - 6$

ตอบ $y = \frac{3}{2}x - 7$

ข้อ 10 แทน $y = 0$ ได้ $p = 10$ และแทน $x = 0$ ได้ $q = 6$ จึง $p + q = 16$

ตอบ 16

ข้อ 11 สมการคือ $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ เมื่อ $x = 9$ ได้ $\frac{y}{4} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

ตอบ -2

ข้อ 12 ความชัน $m = \frac{-5 - 7}{4 - (-2)} = -2$ ใช้ $y - 7 = -2(x + 2)$

ตอบ $y = -2x + 3$