MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

www.mathstandard.com

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ครอบคลุม อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก มุมสำคัญ เอกลักษณ์ สมการ เรเดียน การหาความยาวและพื้นที่ มุมเงยและมุมก้ม ตลอดจนกฎของไซน์และกฎของโคไซน์ เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ อัตราส่วน จำนวนจริง กรณฑ์ สมการกำลังสอง ความคล้าย และทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ขอบเขตและข้อตกลง

- ในสามเหลี่ยม ABC ใช้ $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ แทนความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ ด้านฉากขึ้นอยู่กับตำแหน่งมุมฉากของแต่ละรูป
- มุมที่เขียน $^\circ$ ใช้หน่วยองศา สูตรที่ระบุเรเดียนต้องใช้หน่วยเรเดียน การแทนค่าต้องใช้หน่วยมุมให้สอดคล้องกัน
- สัญลักษณ์ $\sin^2 A$ หมายถึง $(\sin A)^2$ ส่วน $\sin(2A)$ หมายถึงไซน์ของมุมที่มีขนาดเป็นสองเท่าของมุม A
- ตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์ ความยาวเป็นบวก และใช้หน่วยเดียวกัน พื้นที่ใช้ Area เพื่อไม่ให้สับสนกับชื่อมุม
- รูปประกอบแสดงความสัมพันธ์ คำนวณจากเงื่อนไขที่กำหนด ไม่ใช้การวัดจากรูป คำตอบใช้ค่าที่แน่นอน เว้นแต่ระบุการประมาณค่า

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

สารบัญ

ตอนที่ 1 อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–14 11

ตอนที่ 2 มุมสำคัญและการคำนวณ

เนื้อหาและตัวอย่าง 19

แบบฝึกหัดข้อ 15–28 26

ตอนที่ 3 เอกลักษณ์และมุมเติมเต็ม

เนื้อหาและตัวอย่าง 34

แบบฝึกหัดข้อ 29–42 39

ตอนที่ 4 พีชคณิตและสมการตรีโกณมิติ

เนื้อหาและตัวอย่าง 47

แบบฝึกหัดข้อ 43–56 56

ตอนที่ 5 หน่วยเรเดียน

เนื้อหาและตัวอย่าง 64

แบบฝึกหัดข้อ 57–70 68

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 6 ความยาว เส้นสูง และพื้นที่

เนื้อหาและตัวอย่าง 76

แบบฝึกหัดข้อ 71–84 81

ตอนที่ 7 มุมเงย มุมก้ม และความสูง

เนื้อหาและตัวอย่าง 89

แบบฝึกหัดข้อ 85–98 95

ตอนที่ 8 ระยะบนพื้นและความกว้าง

เนื้อหาและตัวอย่าง 103

แบบฝึกหัดข้อ 99–112 108

ตอนที่ 9 กฎของไซน์และกฎของโคไซน์

เนื้อหาและตัวอย่าง 116

แบบฝึกหัดข้อ 113–126 124

สรุปเนื้อหา เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ 132

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 127–146 141

เฉลยคำตอบ 151

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 158

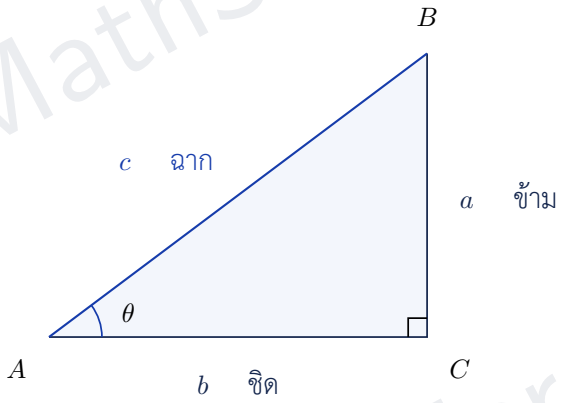
MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.1 มุมอ้างอิงและชื่อด้าน

อัตราส่วนตรีโกณมิติ เป็น ความสัมพันธ์ ระหว่าง ขนาด มุม กับ อัตราส่วน ความยาว ด้าน ของ รูป สามเหลี่ยมมุมฉาก การระบุด้านต้องเริ่มจากมุมแหลมที่กำลังพิจารณา ซึ่งเรียกว่า **มุมอ้างอิง**



มุม $C = 90°$ และ $A = \theta$ โดย $a = BC$, $b = CA$ และ $c = AB$

ความหมายของคำช่วยจำ

ข้าม คือด้านตรงข้ามมุมที่พิจารณา จึงเป็นด้านที่ไม่ผ่านจุดยอดของมุมนั้น

ชิด คือด้านประชิดมุมที่พิจารณา โดยไม่ใช่ด้านตรงข้ามมุมฉาก

ฉาก คือด้านตรงข้ามมุมฉาก เป็นด้านที่ยาวที่สุด

จากรูป ด้าน a, b, c อยู่ตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ เมื่อพิจารณามุม A ด้าน BC คือข้าม ด้าน CA คือ ชิด และด้าน AB คือฉาก เมื่อพิจารณามุม B ข้ามกับชิดจะสลับกัน แต่ชื่อด้านและด้านฉากคงเดิม

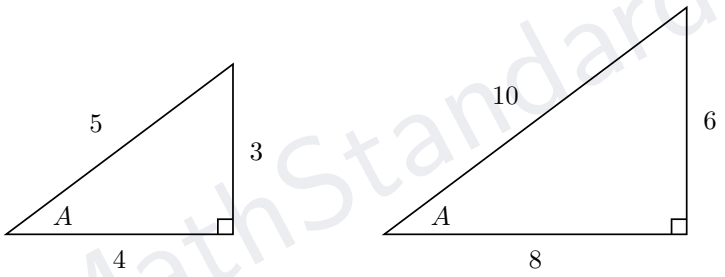
ตัวอย่าง 1 จากรูป จงระบุด้านตรงข้ามและด้านประชิดมุม B

วิธีคิด มุม B ประกอบด้วยด้าน BA และ BC แต่ BA เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก จึงเหลือ BC เป็นด้านประชิด ส่วนด้านที่ไม่ผ่านจุด B คือ CA

ตอบ ด้านตรงข้ามคือ CA และด้านประชิดคือ BC

1.2 ความคล้ายกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ

รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมแหลมคู่หนึ่งเท่ากันย่อมคล้ายกัน เพราะมุมอีกคู่หนึ่งเท่ากันด้วย ด้านที่สมนัยกันจึงเป็นสัดส่วน อัตราส่วนของด้านสองด้านจึงขึ้นกับมุม ไม่ขึ้นกับขนาดของรูป



รูปทั้งสองมีมุม A เท่ากัน และด้านตรงข้ามมุมฉากอยู่ตรงข้ามมุม 90°

เมื่อขยายด้านทั้งสามด้วยตัวคูณร่วมเดียวกัน ตัวคูณนั้นจะตัดกันในอัตราส่วน เช่น ด้านของรูปซ้ายเป็น $3, 4, 5$ และรูปขวาเป็น $6, 8, 10$ หน่วย จะได้

$$\frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \qquad \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} \qquad \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

นิยามอัตราส่วนหลัก

ในสามเหลี่ยม ABC ที่มี $C = 90^\circ$ และ $\theta = A$ ให้ $a = BC$, $b = CA$ และ $c = AB$ เป็นด้านข้าม ด้านชิด และด้านฉาก ตามลำดับ

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \qquad \cos\theta = \frac{b}{c} \qquad \tan\theta = \frac{a}{b}$$

อ่านว่า ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ตามลำดับ

คำช่วยจำ: **ไซน์ ข้ามฉาก** **โคไซน์ ชิดฉาก** **แทน ข้ามชิด**

$$\sin\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$$

อัตราส่วน เหล่า นี้ ไม่มี หน่วย เพราะ เป็นการ หาร ความยาว ที่ ใช้ หน่วย เดียวกัน สำหรับ มุมแหลม มี $0 < \sin\theta < 1$, $0 < \cos\theta < 1$ ส่วน $\tan\theta > 0$ และอาจมากกว่า 1 ได้

MathStandard
MathStandard
MathStandard

การใช้นิยามอัตราส่วนหลัก

ก่อนแทนค่าต้องระบุมุมที่พิจารณาและด้านทั้งสามให้ตรงกัน หากทราบเพียงสองด้าน ให้ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสหาด้านที่เหลือก่อน

ตัวอย่าง 2 สามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านตรงข้ามมุม A ยาว 9 และด้านประชิดยาว 12 หน่วย จงหาอัตราส่วนหลักทั้งสาม

วิธีคิด ให้ $c > 0$ แทนความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

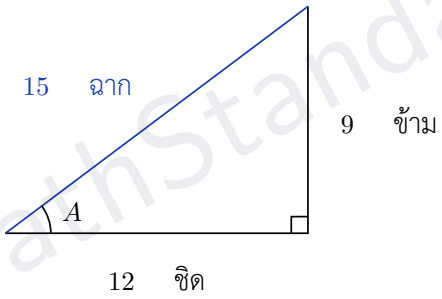
$$c^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \qquad c = 15$$

เมื่อพิจารณามุม A ด้านข้ามยาว 9 ด้านชิดยาว 12 และด้านฉากยาว 15 หน่วย จึงได้

$$\sin A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \qquad \cos A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

ตอบ $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{4}{5}$ และ $\tan A = \frac{3}{4}$



ด้านข้ามและด้านชิดระบุโดยเทียบกับมุม A ส่วนด้านฉากอยู่ตรงข้ามมุมฉากเสมอ

> **การใช้คำช่วยจำอย่างถูกต้อง**
> เลือกมุมอ้างอิงก่อนระบุข้ามและชิด จากนั้นจึงเขียนอัตราส่วน
> คำว่า **ฉาก** หมายถึงด้านตรงข้ามมุมฉาก ไม่ใช่ด้านประกอบมุมฉาก

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.3 อัตราส่วนส่วนกลับ

ส่วนกลับของจำนวนที่ไม่เป็นศูนย์เกิดจากการนำ 1 หารด้วยจำนวนนั้น อัตราส่วนส่วนกลับจึงสลับตัวเศษกับตัวส่วนของอัตราส่วนเดิม โดยยังคงใช้มุมอ้างอิงเดิม

อัตราส่วนส่วนกลับทั้งสาม

ใช้สามเหลี่ยม ABC ที่มี $C = 90^\circ$ และ $\theta = A$ เช่นเดิม

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{c}{a} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{b}$$

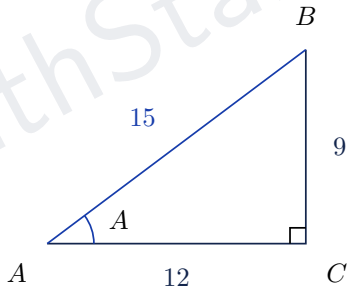
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{b}{a}$$

$\csc$ อ่านว่า โคเซแคนต์ และเขียนเป็น cosec ได้

$\sec$ อ่านว่า เซแคนต์ และ $\cot$ อ่านว่า โคแทนเจนต์

สำหรับมุมแหลม ความยาวด้านทุกด้านเป็นบวก อัตราส่วนทั้งหกจึงเป็นบวก และตัวส่วนในนิยามไม่เป็นศูนย์ จากการหารอัตราส่วนไซน์ด้วยโคไซน์ยังได้

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan\theta$$



ใช้มุม A เดิมเมื่อหาอัตราส่วนส่วนกลับ

ตัวอย่าง 3 จงหา $\csc A$, $\sec A$ และ $\cot A$ จากรูป

วิธีคิด กลับอัตราส่วนของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ตามลำดับ

$$\csc A = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \qquad \sec A = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \qquad \cot A = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

ตอบ $\csc A = \frac{5}{3}$, $\sec A = \frac{5}{4}$ และ $\cot A = \frac{4}{3}$

1.4 การหาอัตราส่วนอื่นจากอัตราส่วนที่ทราบ

เมื่อทราบอัตราส่วนหนึ่งของมุมแหลม ให้ **สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากก่อน** แล้วกำหนดด้านสองด้านตามนิยามของอัตราส่วนที่ทราบ ความยาวที่เลือกเป็นตัวแทนของสัดส่วน ไม่จำเป็นต้องเป็นความยาวจริงของรูปเดิม

ลำดับการหาอัตราส่วนอื่น

1 วาดสามเหลี่ยมมุมฉากและระบุมุมที่กำลังพิจารณา

2 กำหนดสองด้านจากอัตราส่วนที่ทราบ แล้วใช้พีทาโกรัสหาด้านที่เหลือ

3 อ่านค่าด้านข้าม ชิด และฉาก เพื่อเขียนอัตราส่วนที่ต้องการ

ในสามเหลี่ยม ABC ที่มี $C = 90^\circ$ ด้านประกอบมุมฉากคือ a, b และด้านฉากคือ c จึงมี $a^2 + b^2 = c^2$

ตัวอย่าง 4 มุม A เป็นมุมแหลมและ $\tan A = \dfrac{5}{12}$ จงหา $\sin A$ และ $\sec A$

วิธีคิด เนื่องจาก $\tan A = \dfrac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$ จึงสร้างสามเหลี่ยมโดยให้ด้านข้ามยาว 5 และด้านชิดยาว 12 หน่วย ให้ด้านฉากยาว $c > 0$ หน่วย

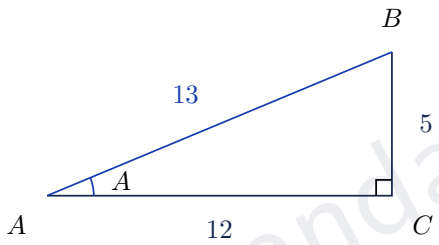
ใช้พีทาโกรัสหาด้านฉาก โดย **บวกกำลังสองของด้านประกอบมุมฉาก**

$$c^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \qquad c = 13$$

จากนั้นอ่านอัตราส่วนที่ถามจากรูป

$$\sin A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{5}{13} \qquad \sec A = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \frac{13}{12}$$

ตอบ $\sin A = \dfrac{5}{13}$ และ $\sec A = \dfrac{13}{12}$



ด้านข้ามและด้านชิดมาจากแทนเจนต์ ส่วนด้านฉากหาโดยพีทาโกรัส

เมื่อทราบด้านฉากกับด้านประกอบมุมฉาก

ถ้าอัตราส่วนที่ทราบเป็นไซน์หรือโคไซน์ จะกำหนดด้านฉากได้ตั้งแต่ต้น การหาด้านประกอบมุมฉากที่เหลือจึงใช้ **กำลังสองของด้านฉากลบด้วยกำลังสองของด้านที่ทราบ**

การจัดสมการพีทาโกรัส

$$a^2+b^2=c^2 \quad \Longrightarrow \quad a^2=c^2-b^2 \quad \Longrightarrow \quad a=\sqrt{c^2-b^2}$$

ความยาวด้านต้องเป็นบวก และด้านฉากต้องยาวกว่าด้านประกอบมุมฉากแต่ละด้าน

ตัวอย่าง 5 ถ้า $\sin B=\frac{8}{17}$ และ B เป็นมุมแหลม จงหา $\tan B$

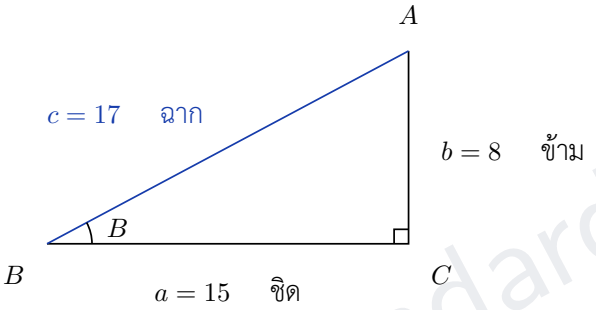
วิธีคิด จาก $\sin B=\frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$ สร้างสามเหลี่ยมที่มีด้านข้ามมุม B ยาว 8 และด้านฉากยาว 17 หน่วย กำหนดมุม $C=90^\circ$ จึงมี $b=8$, $c=17$ และให้ด้านชิดมุม B ยาว $a>0$ หน่วย
ใช้พีทาโกรัสกับด้านทั้งสาม

$$a^2+8^2=17^2 \quad \Longrightarrow \quad a^2=289-64=225 \quad \Longrightarrow \quad a=15$$

ดังนั้น แทนเจนต์ของมุม B หาได้จากด้านข้ามหารด้วยด้านชิด

$$\tan B=\frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}=\frac{8}{15}$$

ตอบ $\frac{8}{15}$



มุม B เป็นมุมแหลม ด้านที่ยังไม่ทราบคือด้านประชิดมุม B

ไม่กำหนดด้านจากตำแหน่งบนกระดาษเพียงอย่างเดียว ด้านเอียงในรูปอาจไม่ใช่ด้านฉาก หากมุมฉากอยู่ในตำแหน่งอื่น

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 สามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก โดย $AB = 16$, $BC = 12$ และ $AC = 20$ หน่วย จงหา $\sin A$ และ $\cos A$

ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 กำหนดให้ A เป็นมุมแหลมและ $\tan A = \frac{8}{15}$ จงหา $\sin A$

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{12}{13}$ และ θ เป็นมุมแหลม จงหา $\cos\theta$ และ $\tan\theta$

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 สามเหลี่ยม ABC มี $C = 90^\circ$ และ $a = BC = 7$, $b = CA = 24$, $c = AB = 25$ หน่วย จงหา $\sin B$, $\cos B$ และ $\tan B$

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	$\sin A = \frac{3}{5}, \cos A = \frac{4}{5}$
2	$\frac{8}{17}$
3	$\cos\theta = \frac{5}{13}, \tan\theta = \frac{12}{5}$
4	$\frac{24}{25}, \frac{7}{25}$ และ $\frac{24}{7}$ ตามลำดับ
5	$\frac{21}{20}, \frac{29}{21}, \frac{29}{20}$ ตามลำดับ
6	20
7	$\frac{576}{625}$
8	$\frac{5}{13}$ และ $\frac{12}{5}$ ตามลำดับ
9	$\frac{9}{8}$
10	$\frac{3}{19}$
11	$\frac{3}{5}$
12	$\frac{12}{5}$ และ 0 ตามลำดับ
13	$\frac{12}{13}$
14	13 เมตร และ $\frac{5}{13}$
15	10 และ $\tan 90^\circ$ ไม่นิยาม
16	8 และ $4\sqrt{2}$ ตามลำดับ
17	9 เซนติเมตร
18	$\frac{3}{2}$
19	18 เซนติเมตร
20	3 และ 3 ตามลำดับ

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก

ข้อ 1 เมื่อพิจารณามุม A ด้านตรงข้ามคือ BC และด้านประชิดคือ AB จึงได้ $\sin A = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ และ $\cos A = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

ตอบ $\sin A = \frac{3}{5}, \cos A = \frac{4}{5}$

ข้อ 2 เลือกด้านตรงข้ามและด้านประชิดมุม A เป็น 8 และ 15 หน่วย ด้านตรงข้ามมุมฉากจึงยาว $\sqrt{8^2+15^2} = 17$ หน่วย ดังนั้น $\sin A = \frac{8}{17}$

ตอบ $\frac{8}{17}$

ข้อ 3 เลือกด้านตรงข้ามยาว 12 และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 13 หน่วย ด้านประชิดยาว $\sqrt{13^2-12^2} = 5$ หน่วย จึงเขียนอัตราส่วนได้ตามนิยาม

ตอบ $\cos\theta = \frac{5}{13}, \tan\theta = \frac{12}{5}$

ข้อ 4 เมื่อพิจารณามุม B ด้านข้ามคือ $b = 24$ ด้านชิดคือ $a = 7$ และด้านฉากคือ $c = 25$ จึงเขียนอัตราส่วนตามนิยาม

ตอบ $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}$ และ $\frac{24}{7}$ ตามลำดับ

ข้อ 5 ใช้ด้านตรงข้าม 20 ด้านประชิด 21 และด้านตรงข้ามมุมฉาก $\sqrt{20^2+21^2} = 29$ แล้วกลับอัตราส่วนของแทนเจนต์ โคไซน์ และไซน์ ตามลำดับ

ตอบ $\frac{21}{20}, \frac{29}{21}, \frac{29}{20}$ ตามลำดับ

ข้อ 6 ได้ $\sin A = \frac{3}{5}$ และ $\cos A = \frac{4}{5}$ จึงมี $6\csc A + 8\sec A = 6(\frac{5}{3}) + 8(\frac{5}{4}) = 20$

ตอบ 20

ข้อ 7 ได้ด้านในอัตราส่วน $24:7:25$ ดังนั้น $\cos A \sin A \tan A = (\frac{7}{25})(\frac{24}{25})(\frac{24}{7}) = \frac{576}{625}$

ตอบ $\frac{576}{625}$

ข้อ 8 เลือกด้านฉาก 13 และด้านชิด 12 หน่วย ด้านข้ามยาว $\sqrt{13^2-12^2} = 5$ หน่วย จึงมี $\sin A = \frac{5}{13}$ และ $\cot A = \frac{12}{5}$

ตอบ $\frac{5}{13}$ และ $\frac{12}{5}$ ตามลำดับ

ข้อ 9 แทน $\sin A = \frac{3}{5}$ และ $\cos A = \frac{4}{5}$ แล้วคูณทั้งเศษและส่วนด้วย 5 ได้ $\frac{2\cdot 3 + 3\cdot 4}{4\cdot 3 + 4} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$

ตอบ $\frac{9}{8}$