MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง การแปรผัน

www.mathstandard.com

เรื่อง การแปรผัน

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง การแปรผัน ครอบคลุม การแปรผันตรง การแปรผกผัน การแปรผันร่วม การแปรผันหลายลักษณะ และการประยุกต์กับปริมาณที่สัมพันธ์กัน เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ อัตราส่วน ร้อยละ เลขยกกำลัง กรณฑ์ และระบบสมการเชิงเส้น

ขอบเขตและข้อตกลง

- สัญลักษณ์ $\propto$ หมายถึงการแปรผันตรงกับนิพจน์ที่ระบุ และ $k \neq 0$ แทนค่าคงตัวของความสัมพันธ์หนึ่งภายใต้หน่วยและเงื่อนไขเดิม
- ตัวแปรเป็นจำนวนจริง เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น ตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์ และกรณฑ์อันดับคู่ต้องมีปริมาณภายในไม่เป็นลบ
- การเทียบอัตราส่วนใช้ข้อมูลเดิมและใหม่ที่มีค่าคงตัวเดียวกัน ต้องแปลงหน่วยให้สอดคล้อง และตรวจตัวส่วนของสูตรอัตราส่วนก่อนใช้
- ปริมาณทางกายภาพ เช่น เวลา ความยาว และมวล ต้องสอดคล้องกับสถานการณ์ กฎที่กำหนดเป็นแบบจำลองภายใต้เงื่อนไขที่ระบุ
- แยกเวลารวมออกจากเวลาที่ทำงานจริง ระยะทางสะสมออกจากปริมาณที่เพิ่ม และปริมาณใหม่ออกจากร้อยละที่เปลี่ยนแปลง

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง การแปรผัน

สารบัญ

ตอนที่ 1 การแปรผันตรงและกำลังของปริมาณ

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–16 9

ตอนที่ 2 การแปรผกผัน

เนื้อหาและตัวอย่าง 18

แบบฝึกหัดข้อ 17–32 22

ตอนที่ 3 การแปรผันเกี่ยวเนื่อง

เนื้อหาและตัวอย่าง 31

แบบฝึกหัดข้อ 33–48 36

ตอนที่ 4 การแปรผันรวม

เนื้อหาและตัวอย่าง 45

แบบฝึกหัดข้อ 49–64 50

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง การแปรผัน

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 เวลา ระยะทาง และปริมาณสะสม

เนื้อหาและตัวอย่าง 59

แบบฝึกหัดข้อ 65–80 65

ตอนที่ 6 ผลบวกของปริมาณที่แปรผัน

เนื้อหาและตัวอย่าง 74

แบบฝึกหัดข้อ 81–96 79

สรุปเนื้อหา เรื่อง การแปรผัน 88

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 97–116 94

เฉลยคำตอบ 104

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 109

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

การแปรผันตรงและกำลังของปริมาณ

1.1 ความหมายของการแปรผันตรง

ค่าคงตัวคูณตัวแปร

y แปรผันตรงกับ x เขียน $y \propto x$ หมายถึง

$$y = kx \qquad (k \neq 0)$$

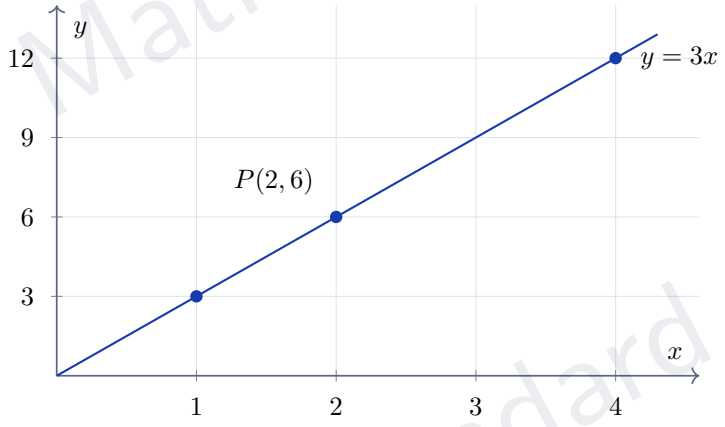
k คือค่าคงตัวของความสัมพันธ์นี้ หาได้จาก $k = \dfrac{y}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ ส่วน $x = 0$ ทำให้ $y = 0$

ถ้าข้อมูลสองชุดใช้ k เดียวกัน และ $x_1, y_1 \neq 0$ จะมี

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}$$

ดัชนี 1 หมายถึงข้อมูลเดิม และดัชนี 2 หมายถึงข้อมูลใหม่

x	1	2	3	4
$y = 3x$	3	6	9	12
$\dfrac{y}{x}$	3	3	3	3



กราฟ $y = 3x$ ผ่านจุดกำเนิด และอัตราส่วน $\dfrac{y}{x}$ เท่ากับ 3 สำหรับทุกจุดที่ $x \neq 0$

ตัวอย่าง 1 $y \propto x$ และ $y = 20$ เมื่อ $x = 5$ จงหา y เมื่อ $x = 7$

วิธีคิด เขียน $y = kx$ แล้วแทนข้อมูล $20 = 5k$ จึงได้ $k = 4$ ความสัมพันธ์คือ $y = 4x$ เมื่อ $x = 7$ จะได้ $y = 4(7) = 28$

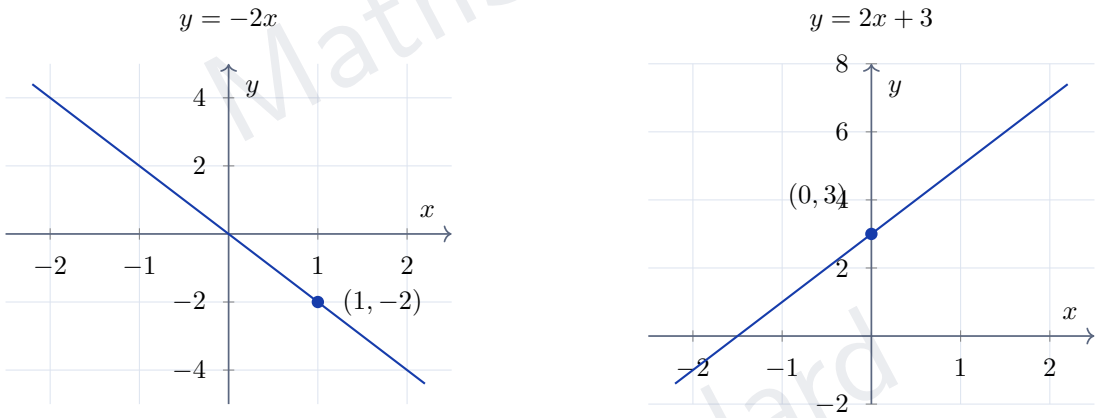
ตอบ 28

1.2 กราฟและเครื่องหมายของค่าคงตัว

เส้นตรงผ่านจุดกำเนิด

$y = kx$ มีความชัน k ถ้า $k > 0$ ตัวแปรมีเครื่องหมายเดียวกัน ถ้า $k < 0$ ตัวแปรมีเครื่องหมายตรงข้ามกัน

สมการ $y = A + kx$ เมื่อ $A \neq 0$ ไม่ใช่การแปรผันตรงกับ x เพราะกราฟไม่ผ่านจุดกำเนิด แม้จะเป็นเส้นตรง



ซ้าย: $y = -2x$ เป็นการแปรผันตรงที่ $k < 0$ ขวา: $y = 2x + 3$ มีส่วนคงตัว จึงไม่ใช่การแปรผันตรงกับ x

ตัวอย่าง 2 $y \propto x$ โดย $y = -12$ เมื่อ $x = 3$ จงหาค่า y เมื่อ $x = 5$

วิธีคิด ค่าคงตัวคือ $k = -\frac{12}{3} = -4$ จึงมี $y = -4x$ เมื่อ $x = 5$ ได้ $y = -20$ หรือใช้อัตราส่วน $y = -12(\frac{5}{3}) = -20$

ตอบ -20

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.3 กำลังสองและกำลังสาม

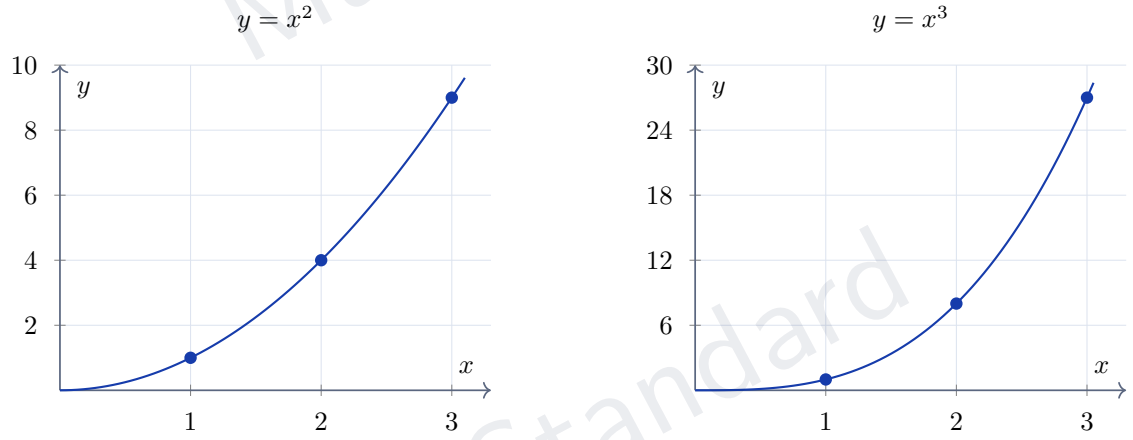
แปรผันกับนิพจน์ที่ระบุ

$$y \propto x^2 \implies y = kx^2$$

$$y \propto x^3 \implies y = kx^3$$

ถ้า $x_2 = rx_1$ จะมี $y_2 = r^2 y_1$ หรือ $y_2 = r^3 y_1$ ตามลำดับ ไม่ใช้ตัวคูณ r โดยตรง

กรณี $y = kx^2$ หากย้อนหา x จริง อาจได้สองเครื่องหมาย ต้องตรวจข้อจำกัดของสถานการณ์



กราฟกำลังสองและกำลังสามในช่วง $x \geq 0$ ความสัมพันธ์กับ x^2 หรือ x^3 ต่างจากเส้นตรง $y = kx$

ตัวอย่าง 3 $y \propto x^2$ และ $y = 45$ เมื่อ $x = 3$ จงหา y เมื่อ $x = 4$

วิธีคิด จาก $45 = k(3^2)$ ได้ $k = 5$ เมื่อ $x = 4$ จึงมี $y = 5(4^2) = 80$

ตอบ 80

ตัวอย่าง 4 ปริมาตรของวัตถุรูปคล้ายแปรผันตรงกับกำลังสามของความยาว เมื่อความยาวทุกด้านเป็น $\frac{3}{2}$ เท่าของเดิม ปริมาตรเป็นกี่เท่าของเดิม

วิธีคิด อัตราส่วนปริมาตรคือ $(\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$ ต้องยกกำลังทั้งอัตราส่วนของความยาว

ตอบ $\frac{27}{8}$ เท่าของเดิม

1.4 รากที่สองและรากที่สาม

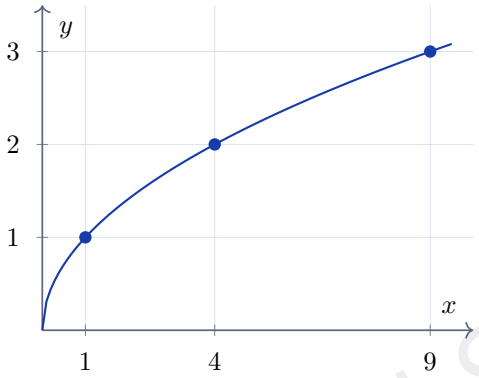
กำหนดขอบเขตจากกรณฑ์

$$y = k\sqrt{x} \quad (x \geq 0), \qquad y = k\sqrt[3]{x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

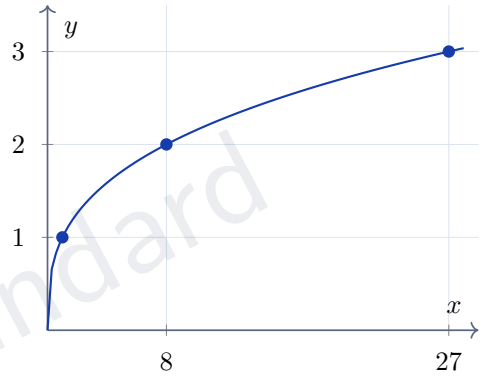
รากที่สองใช้ค่าหลักที่ไม่เป็นลบ ส่วนรากที่สามของจำนวนลบยังเป็นจำนวนจริง ถ้าทราบ y ให้หาอัตราส่วน $\frac{y}{k}$ ก่อนยกกำลังกลับ

สำหรับรากที่สองต้องตรวจ $\frac{y}{k} \geq 0$ มิฉะนั้นไม่มีค่า x จริงที่สอดคล้อง

$y = \sqrt{x}$



$y = \sqrt[3]{x}$



จุดค่ากรณฑ์ที่ใช้คำนวณได้โดยตรง รูปแสดงเฉพาะช่วงไม่เป็นลบ แต่รากที่สามมีนิยามสำหรับจำนวนจริงลบด้วย

ตัวอย่าง 5 $y \propto \sqrt{x}$ และ $y = 12$ เมื่อ $x = 16$ จงหา y เมื่อ $x = 36$

วิธีคิด เขียน $12 = k\sqrt{16} = 4k$ ได้ $k = 3$ ดังนั้น $y = 3\sqrt{36} = 3(6) = 18$

ตอบ 18

ตัวอย่าง 6 $y \propto \sqrt[3]{x}$ และ $y = 10$ เมื่อ $x = 8$ จงหา y เมื่อ $x = 27$

วิธีคิด จาก $10 = k\sqrt[3]{8} = 2k$ ได้ $k = 5$ เมื่อ $x = 27$ มี $y = 5\sqrt[3]{27} = 5(3) = 15$

ตอบ 15

MathStandard

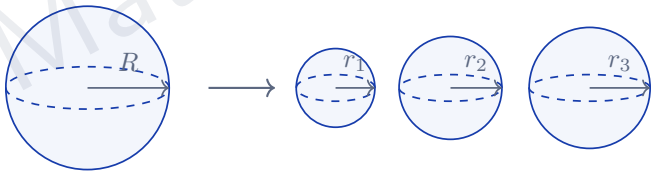
1.5 ปริมาตรและการแบ่งวัสดุ

รูปคล้ายและปริมาณวัสดุคงเดิม

รูปที่คล้ายกันมีตัวคูณความยาว $r>0$ จะมีตัวคูณพื้นที่ r^2 และปริมาตร r^3
ทรงกลมเดิมรัศมี R แบ่งเป็นทรงกลมรัศมี $r_1,\dots,r_n$ โดยไม่สูญเสียเนื้อวัสดุ จะมี

$$R^3=r_1^3+\cdots+r_n^3$$

ถ้าขนาดใหม่เท่ากันทุกลูกและมีรัศมี r ได้ $R^3=nr^3$ เพราะตัวคูณ $\frac{4\pi}{3}$ ของปริมาตรตัดกัน



ปริมาตรรวมหลังแบ่งเท่ากับปริมาตรเดิม รูปแสดงรัศมีเดิม R และรัศมีใหม่ r_1,r_2,r_3

ตัวอย่าง 7 ลูกบอลดินปั้นรัศมี 4 เซนติเมตรแบ่งเป็นลูกบอลตันขนาดเท่ากัน 8 ลูกโดยไม่สูญเสียเนื้อวัสดุ จงหารัศมีของแต่ละลูก

วิธีคิด ให้ $r>0$ แทนรัศมีของลูกใหม่แต่ละลูก หน่วยเซนติเมตร จากปริมาตรรวมคงเดิมได้ $4^3=8r^3$
ดังนั้น $r^3=\frac{64}{8}=8$ จึงได้ $r=2$

ตอบ 2 เซนติเมตร

1.6 หน่วยและค่าคงตัว

ใช้หน่วยเดียวกันก่อนเทียบอัตราส่วน

ค่าตัวเลขของ k ขึ้นกับหน่วย เช่น y เป็นกรัมกับ x เป็นเมตร จะให้หน่วยของ k เป็นกรัมต่อเมตร
การเปลี่ยนหน่วยทำให้ค่าตัวเลขของ k เปลี่ยนได้ แต่ไม่เปลี่ยนความสัมพันธ์ทางปริมาณ ต้องแปลงหน่วยของข้อมูลทั้งสองชุดให้สอดคล้องก่อนใช้สูตรอัตราส่วน

สรุป

ระบุนิพจน์ที่แปรผันด้วยให้ชัด หาและใช้ค่าคงตัวเดียวกันตลอดความสัมพันธ์ ตรวจเครื่องหมาย กรณฑ์ หน่วย และเงื่อนไขรูปคล้ายก่อนใช้ตัวคูณกำลังสองหรือกำลังสาม

เรื่อง การแปรผัน | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 y แปรผันตรงกับ x และ $y = 18$ เมื่อ $x = 12$ จงหาค่าคงตัวของการแปรผัน

ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 y แปรผันตรงกับ x โดย $y = -15$ เมื่อ $x = 6$ จงหา x เมื่อ $y = -35$

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง การแปรผัน | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 พื้นที่ของลวดลายที่ขยายอย่างได้สัดส่วนแปรผันตรงกับกำลังสองของตัวคูณการขยาย r ถ้า $r = 2$ มีพื้นที่ 8 ตารางเซนติเมตร เมื่อ $r = 5$ จะมีพื้นที่เท่าใด

ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 y แปรผันตรงกับ $\sqrt{x}$ โดย $x \geq 0$ ถ้า $y = 6$ เมื่อ $x = 9$ จงหา y เมื่อ $x = 49$

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง การแปรผัน

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	$\frac{3}{2}$
2	14
3	50 ตารางเซนติเมตร
4	14
5	12
6	$y = -4x$
7	9 เมตร
8	$1{,}000$ กรัม
9	$16 : 25$ และลดลงร้อยละ 36
10	36π ลูกบาศก์เซนติเมตร
11	$k = 2$ และค่า y ตามตารางคือ $-4, -2, 0, 2, 4$
12	10 เซนติเมตร
13	ไม่สอดคล้องกับการแปรผันตรง
14	$x = -3, 3$
15	16 เมตร
16	ใหม่ 162 ตารางเซนติเมตร ลดลง 38 ตารางเซนติเมตร
17	6
18	12
19	$k = 60, y = 6$
20	42 ชิ้นต่อนาที
21	450 ลูกบาศก์เซนติเมตร
22	0.5 แอมแปร์
23	10 วัน

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 การแปรผันตรงและกำลังของปริมาณ

ข้อ 1 จาก $y = kx$ แทนข้อมูลได้ $18 = 12k$ จึงมี $k = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

ตอบ $\frac{3}{2}$

ข้อ 2 จาก $k = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}$ ได้ $y = -\frac{5}{2}x$ แทน $y = -35$ จึงได้ $x = (-35)(-\frac{2}{5}) = 14$

ตอบ 14

ข้อ 3 ให้ A แทนพื้นที่เป็นตารางเซนติเมตร และ r เป็นตัวคูณการขยายตามโจทย์ จึงมี $A = kr^2$ จาก $8 = k(2^2)$ ได้ $k = 2$ ดังนั้นเมื่อ $r = 5$ มี $A = 2(5^2) = 50$

ตอบ 50 ตารางเซนติเมตร

ข้อ 4 แทนค่าใน $y = k\sqrt{x}$ ได้ $6 = 3k$ จึงมี $k = 2$ เมื่อ $x = 49$ ได้ $y = 2\sqrt{49} = 14$

ตอบ 14

ข้อ 5 จาก $15 = k\sqrt[3]{125} = 5k$ ได้ $k = 3$ ดังนั้น $y = 3\sqrt[3]{64} = 3(4) = 12$

ตอบ 12

ข้อ 6 ให้ $y = kx$ ได้ $k = -\frac{20}{5} = -4$

ตอบ $y = -4x$

ข้อ 7 ให้ m แทนมวลเป็นกรัม และ ℓ แทนความยาวเป็นเมตร จะได้ $m = k\ell$ และ $k = \frac{450}{6} = 75$ กรัมต่อเมตร ดังนั้น $675 = 75\ell$ ให้ $\ell = 9$

ตอบ 9 เมตร

ข้อ 8 ให้ m แทนมวลเป็นกรัม และ ℓ แทนความยาวขอบเป็นเซนติเมตร จาก $m = k\ell^3$ ได้ $k = \frac{216}{3^3} = 8$ ดังนั้น $m = 8(5^3) = 1{,}000$

ตอบ $1{,}000$ กรัม

ข้อ 9 รัศมีใหม่เป็น $1 - \frac{20}{100} = \frac{4}{5}$ เท่าของเดิม อัตราส่วนพื้นที่จึงเป็น $(\frac{4}{5})^2 = \frac{16}{25}$ พื้นที่ลดลง $(1 - \frac{16}{25})100 = 36$ เปอร์เซ็นต์

ตอบ $16 : 25$ และลดลงร้อยละ 36

ข้อ 10 ให้ V_1, V_2 แทนปริมาตรของทรงกลมรัศมี $r_1 = 2, r_2 = 3$ เซนติเมตรตามลำดับ ใช้ $V_2 = V_1(\frac{r_2}{r_1})^3$ ได้ $V_2 = \frac{32\pi}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 36\pi$

ตอบ 36π ลูกบาศก์เซนติเมตร