MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว

www.mathstandard.com

เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับตรวจทานมาตรฐาน

เอกสารเรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว ครอบคลุม ปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวย ทรงกลม การตัดและเปลี่ยนขนาด ระดับน้ำ อัตราการไหล รูปทรงประกอบ และหน้าตัด เนื้อหาเรียงจากพื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้นไปสู่การประยุกต์สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 และการแข่งขันทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานที่ใช้ประกอบการศึกษา ได้แก่ พื้นที่ อัตราส่วน สมการ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และความคล้าย

ขอบเขตและข้อตกลง

- ใช้ V แทนปริมาตร S แทนพื้นที่ผิว B แทนพื้นที่ฐาน และ P แทนความยาวรอบรูปฐาน โดยระบุความหมายของตัวแปรภายในแต่ละหัวข้อหรือตัวอย่าง
- ความสูงตั้งฉาก สูงเอียง และสันข้างเป็นคนละความยาว สูตรพื้นที่ผิวข้างของกรวยกลมตรงหรือพีระมิดตรงใช้ภายใต้เงื่อนไขของรูปนั้น
- ปริมาตรใช้หน่วยลูกบาศก์ พื้นที่ผิวใช้หน่วยตาราง การคำนวณน้ำต้องแปลงหน่วยความจุและเวลาให้สอดคล้องกัน
- ภาชนะเปิด หน้าสัมผัส โพรง และร่องที่ตัดออกต้องพิจารณาจากผิวหรือเนื้อวัสดุที่มีอยู่จริง การหลอมใช้ปริมาตรคงเดิมเมื่อไม่มีการสูญเสีย
- รูปประกอบแสดงความสัมพันธ์ ไม่ใช้การวัดจากภาพแทนข้อมูล ค่าที่มี π หรือกรณฑ์ให้ตอบเป็นค่าที่แน่นอน เว้นแต่กำหนดให้ประมาณค่า

ระดับของแบบฝึกหัด

- **ง่าย** ใช้นิยาม สมบัติ หรือสูตรโดยตรง
- **กลาง** จัดรูปหรือเชื่อมโยงหลักการหลายขั้นตอน
- **ยาก** วิเคราะห์เงื่อนไขและให้เหตุผลหลายขั้นตอน
- **ประยุกต์** แปลสถานการณ์หรือเชื่อมโยงความรู้เพื่อสร้างวิธีแก้ปัญหา ความซับซ้อนแตกต่างกันได้ตามหัวข้อ

เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว

สารบัญ

ตอนที่ 1 ปริซึมและทรงกระบอก

เนื้อหาและตัวอย่าง 5

แบบฝึกหัดข้อ 1–18 12

ตอนที่ 2 การตัดและเปลี่ยนขนาดรูปทรง

เนื้อหาและตัวอย่าง 23

แบบฝึกหัดข้อ 19–34 29

ตอนที่ 3 ปริมาตรพีระมิด

เนื้อหาและตัวอย่าง 41

แบบฝึกหัดข้อ 35–53 48

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 4 พื้นที่ผิวพีระมิด

เนื้อหาและตัวอย่าง 60

แบบฝึกหัดข้อ 54–69 65

ตอนที่ 5 กรวยและกรวยตัด

เนื้อหาและตัวอย่าง 76

แบบฝึกหัดข้อ 70–86 83

ตอนที่ 6 ทรงกลมและครึ่งทรงกลม

เนื้อหาและตัวอย่าง 95

แบบฝึกหัดข้อ 87–102 101

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 7 ระดับน้ำและอัตราการไหล

เนื้อหาและตัวอย่าง 112

แบบฝึกหัดข้อ 103–119 118

ตอนที่ 8 รูปทรงประกอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง 129

แบบฝึกหัดข้อ 120–136 135

ตอนที่ 9 ส่วนร่วมของรูปและร่องโค้ง

เนื้อหาและตัวอย่าง 145

แบบฝึกหัดข้อ 137–153 151

สรุปเนื้อหา เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว 168

แบบทดสอบทบทวนท้ายบท ข้อ 154–173 178

เฉลยคำตอบ 188

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 196

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

ปริซึมและทรงกระบอก

1.1 ปริมาตร พื้นที่ผิว และหน่วย

ปริมาตรเป็นขนาดของบริเวณในสามมิติ ส่วนพื้นที่ผิวเป็นผลรวมพื้นที่ของผิวที่ล้อมรูปทรง ปริมาตรจึงใช้หน่วยลูกบาศก์ ขณะที่พื้นที่ผิวใช้หน่วยตาราง การเปลี่ยนหน่วยต้องยกกำลังตามชนิดของปริมาณ

การแปลงหน่วยที่ใช้บ่อย

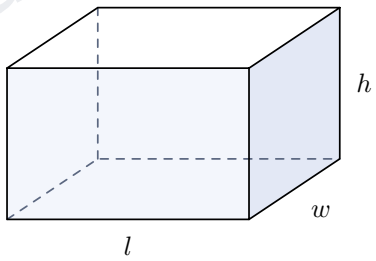
$$1\ \text{m}^2 = 10^4\ \text{cm}^2, \qquad 1\ \text{m}^3 = 10^6\ \text{cm}^3$$

$$1\ \text{L} = 1{,}000\ \text{cm}^3, \qquad 1\ \text{m}^3 = 1{,}000\ \text{L}, \qquad 1\ \text{mL} = 1\ \text{cm}^3$$

เมื่อความยาว 1 หน่วยใหญ่เท่ากับ k หน่วยเล็ก พื้นที่ 1 หน่วยใหญ่เท่ากับ k^2 หน่วยเล็ก และปริมาตรเท่ากับ k^3 หน่วยเล็ก

1.2 พื้นที่ฐานและความสูงตั้งฉาก

ให้ B แทนพื้นที่ฐาน และ h แทนระยะตั้งฉากระหว่างระนาบฐานทั้งสอง ปริซึมมีหน้าตัดขนานฐานที่เท่ากันตลอดความสูง จึงมีปริมาตรเท่ากับพื้นที่ฐานคูณความสูง ทรงกระบอกมีหลักการเดียวกันโดยฐานเป็นวงกลม



ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากมีฐานยาว l กว้าง w และสูง h

ปริมาตรปริซึมและทรงกระบอกเขียนเป็น $V = Bh$ โดย V คือปริมาตร และหน่วยของ B, h ต้องสอดคล้องกัน

ตัวอย่าง 1 กล่องมีขนาดภายใน $20 \times 30 \times 40$ เซนติเมตร จงหาความจุเป็นลิตร

วิธีคิด พื้นที่ฐาน $20(30) = 600$ ตารางเซนติเมตร ปริมาตร $600(40) = 24{,}000$ ลูกบาศก์เซนติเมตร จาก 1 ลิตรเท่ากับ $1{,}000$ ลูกบาศก์เซนติเมตร จึงมีความจุ $\dfrac{24{,}000}{1{,}000} = 24$ ลิตร

ตอบ 24 ลิตร

1.3 ปริซึมตรงและรูปคลี่

ปริซึมตรง มี สันข้าง ตั้งฉาก กับ ฐาน หน้าข้าง แต่ละ หน้า เป็น สี่เหลี่ยมผืนผ้า เมื่อ คลี่ หน้าข้าง ทั้งหมด ความกว้างรวมเท่ากับความยาวรอบรูปฐาน และความสูงเท่ากับความสูงปริซึม

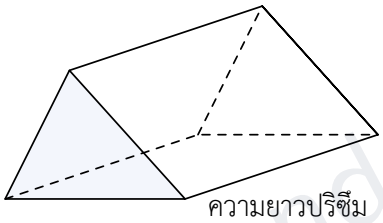
ปริมาตรและพื้นที่ผิวปริซึมตรง

ให้ V เป็นปริมาตร S เป็นพื้นที่ผิว P เป็นความยาวรอบรูปฐาน B เป็นพื้นที่ฐาน และ h เป็นความสูงตั้งฉาก

$$V = Bh, \qquad S_{\text{ข้าง}} = Ph, \qquad S_{\text{ทั้งหมด}} = Ph + 2B$$

สำหรับปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง w ยาว l สูง h

$$V = lwh, \qquad S_{\text{ทั้งหมด}} = 2(lw + lh + wh)$$



ฐานอาจเป็นรูปหลายเหลี่ยมชนิดใดก็ได้

ตัวอย่าง 2 ปริซึมตรงมีฐานเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้าน $6, 8, 10$ เซนติเมตร และยาว 15 เซนติเมตร จงหาปริมาตรและพื้นที่ผิวทั้งหมด

วิธีคิด พื้นที่ฐาน $B = \frac{1}{2}(6)(8) = 24$ และความยาวรอบรูปฐาน $P = 6 + 8 + 10 = 24$ ให้ความยาวปริซึมเป็น $h = 15$ จึงมีปริมาตร $V = 24(15) = 360$ ลูกบาศก์เซนติเมตร และพื้นที่ผิวทั้งหมด $S = 24(15) + 2(24) = 408$ ตารางเซนติเมตร

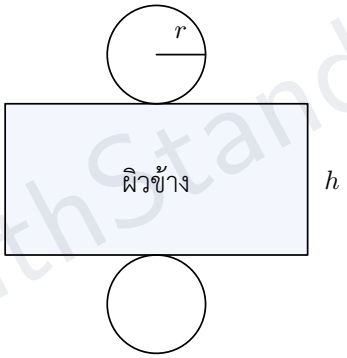
ตอบ ปริมาตร 360 ลูกบาศก์เซนติเมตร และพื้นที่ผิว 408 ตารางเซนติเมตร

สูตรพื้นที่ผิวข้าง Ph ใช้กับปริซึมตรง สำหรับปริซึมเอียงต้องหาพื้นที่หน้าข้างจากขนาดของแต่ละหน้า

MathStandard

1.4 ทรงกระบอกกลมตรง

ฐานของทรงกระบอกเป็นวงกลมสองวงที่เท่ากัน ผิวโค้งเมื่อคลี่บนระนาบเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งยาว $2\pi r$ และสูง h โดย r คือรัศมีฐาน และ h คือความสูงตั้งฉาก



ความกว้างผิวข้าง $= 2\pi r$

รูปคลี่ประกอบด้วยผิวข้างหนึ่งรูปและฐานวงกลมสองรูป

สูตรทรงกระบอกกลมตรง

ให้ V แทนปริมาตร และ S แทนพื้นที่ผิวตามส่วนที่ระบุ

$$V = \pi r^2 h, \qquad S_{\text{ข้าง}} = 2\pi r h$$

$$S_{\text{ทั้งหมด}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

ตัวอย่าง 3 ทรงกระบอกตันรัศมี 3 หน่วย สูง 7 หน่วย จงหาปริมาตรและพื้นที่ผิวทั้งหมด

วิธีคิด ให้รัศมี $r = 3$ และความสูง $h = 7$ จะได้ปริมาตร $V = \pi(3)^2(7) = 63\pi$ และพื้นที่ผิวทั้งหมด $S = 2\pi(3)(7) + 2\pi(3)^2 = 60\pi$

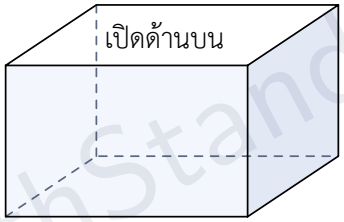
ตอบ ปริมาตร 63π ลูกบาศก์หน่วย และพื้นที่ผิว 60π ตารางหน่วย

หากโจทย์ให้เส้นผ่านศูนย์กลาง ต้องหารด้วย 2 เพื่อหารัศมีก่อนแทนค่า และไม่ควรประมาณค่า π ก่อนสิ้นสุดการคำนวณ

MathStandard
MathStandard
MathStandard

1.5 ภาชนะเปิดและพื้นที่วัสดุ

พื้นที่วัสดุขึ้นอยู่กับผิวที่มีอยู่จริง ภาชนะเปิดด้านบนไม่รวมฝาบน ส่วนการเคลือบเฉพาะด้านนอกต้องไม่รวมผิวด้านใน เว้นแต่โจทย์กำหนดไว้ หากไม่ระบุความหนา ให้ใช้แบบจำลองผิวบางตามข้อมูลของโจทย์



กล่องเปิดด้านบนมีพื้นหนึ่งหน้าและผนังสี่หน้า

สูตรสำหรับภาชนะผิวบางที่เปิดด้านบน

ให้ S แทนพื้นที่วัสดุที่ใช้ทำภาชนะ กล่องกว้าง w ยาว l สูง h

$$S = lw + 2lh + 2wh$$

ถังทรงกระบอกรัศมี r สูง h

$$S = \pi r^2 + 2\pi rh$$

ตัวอย่าง 4 ถังไม่มีฝาทรงกระบอกรัศมีภายใน 4 เซนติเมตร สูง 9 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวด้านในที่ต้องเคลือบ รวมก้นถัง

วิธีคิด ผิวที่ต้องเคลือบคือผนังด้านในและก้นถัง ให้รัศมี $r = 4$ และความสูง $h = 9$ ได้พื้นที่ $2\pi(4)(9) + \pi 4^2 = 88\pi$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 88π ตารางเซนติเมตร

1.6 ปริมาตรจากลูกบาศก์หน่วย

เมื่อรูปทรงประกอบด้วยลูกบาศก์เท่ากันที่ไม่ซ้อนทับกัน ปริมาตรรวมเท่ากับจำนวนลูกคูณปริมาตรต่อลูก การอ่านภาพด้านบนที่บอกความสูงแต่ละช่อง ให้รวมจำนวนลูกในทุกช่องก่อน

$$V = Na^3$$

โดย V คือปริมาตรรวม N คือจำนวนลูกบาศก์ และ a คือความยาวสันของแต่ละลูก

1.7 พื้นที่ผิวของลูกบาศก์ที่ต่อกัน

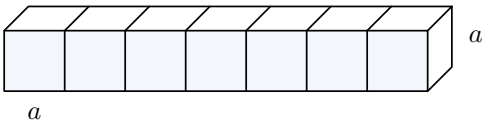
เมื่อต่อลูกบาศก์เต็มหน้า พื้นที่หน้าที่สัมผัสกันจะอยู่ภายในและไม่เป็นพื้นที่ผิวภายนอก การสัมผัสหนึ่งคู่ทำให้หน้าภายนอกหายไปสองหน้า

การนับหน้าภายนอก

ให้ S เป็นพื้นที่ผิวที่เปิดทั้งหมด N เป็นจำนวนลูกบาศก์ สันยาว a เท่ากัน และ E เป็นจำนวนคู่หน้าที่สัมผัสเต็มหน้า

$$S = (6N - 2E)a^2$$

สูตรนี้นับผิวที่เปิดทั้งหมด หากเกิดโพรงปิดภายในและโจทย์ถามเฉพาะผิวนอก ต้องแยกผิวของโพรงออกอีกครั้ง



การเรียงเป็นแถวมีคู่หน้าสัมผัส $N-1$ คู่

ตัวอย่าง 5 ลูกบาศก์สันยาว 2 เซนติเมตรจำนวน 5 ลูกต่อกันเป็นแถวตรง จงหาพื้นที่ผิวภายนอก

วิธีคิด จำนวนคู่หน้าสัมผัสคือ $E = 4$ และจำนวนลูกคือ $N = 5$ จึงมีหน้าภายนอก $6(5) - 2(4) = 22$ หน้า แต่ละหน้ามีพื้นที่ $2^2 = 4$ ได้พื้นที่ผิวรวม $22(4) = 88$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 88 ตารางเซนติเมตร

1.8 จำนวนชิ้นและค่าใช้จ่าย

เมื่อใช้วัสดุชิ้นเท่ากันเติมรูปทรงโดยไม่มีช่องว่าง จำนวนชิ้นเท่ากับปริมาตรรวมหารด้วยปริมาตรต่อชิ้น แต่ต้องตรวจว่ารูปทรงและขนาดสามารถเรียงได้จริง หากโจทย์ระบุการหลอม ให้พิจารณาปริมาตรคงเดิมแทนการจัดเรียง

ตัวอย่าง 6 ปูพื้นที่ยาว 120 กว้าง 80 เซนติเมตรด้วยแผ่นหนาเท่ากันขนาด 20×10 เซนติเมตร จงหาจำนวนแผ่น

วิธีคิด ด้านยาวเรียงได้ $\frac{120}{20} = 6$ แผ่น ด้านกว้างเรียงได้ $\frac{80}{10} = 8$ แผ่น จึงใช้ $6(8) = 48$ แผ่น

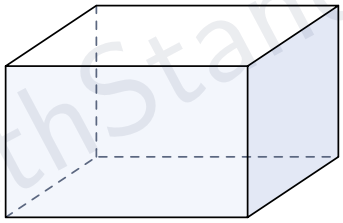
ตอบ 48 แผ่น

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย

ข้อ 1 กล่องเก็บตัวอย่างมีขนาดภายในกว้าง 8 เซนติเมตร ยาว 15 เซนติเมตร และสูง 10 เซนติเมตร จงหาความจุ



ตอบ . . . . . .

ข้อ 2 กล่องบรรจุภัณฑ์ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากมีขนาด $6 \times 10 \times 8$ เซนติเมตร ต้องการหุ้มครบทั้งหกหน้า จงหาพื้นที่วัสดุ โดยไม่คิดส่วนซ้อนทับและความหนา

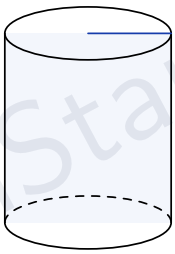
ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว | ตอนที่ 1

แบบฝึกหัด ระดับง่าย (ต่อ)

ข้อ 3 แม่พิมพ์ทรงกระบอกกลมตรงมีรัศมีภายใน 5 เซนติเมตร และลึก 12 เซนติเมตร จงหาความจุ



ตอบ . . . . . .

ข้อ 4 ภาชนะมีความจุ 12.5 ลิตร จงเขียนความจุเป็นลูกบาศก์เซนติเมตร

ตอบ . . . . . .

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว

เฉลยคำตอบ

ข้อ	คำตอบ
1	1200 ลูกบาศก์เซนติเมตร
2	376 ตารางเซนติเมตร
3	300π ลูกบาศก์เซนติเมตร
4	$12{,}500$ ลูกบาศก์เซนติเมตร
5	340 ตารางเซนติเมตร
6	104π ตารางเซนติเมตร
7	516 ตารางเซนติเมตร
8	270 ตารางเซนติเมตร
9	160 ลูกบาศก์เซนติเมตร
10	1920 บาท
11	64 ลูก
12	57π ตารางเซนติเมตร
13	192 ลูกบาศก์เซนติเมตร
14	378 ลูกบาศก์เซนติเมตร
15	$240\sqrt{3}$ ลูกบาศก์หน่วย
16	672 ลูกบาศก์หน่วย
17	488 ลูกบาศก์เซนติเมตร
18	13 ลิตร
19	$3{,}420$ ลูกบาศก์หน่วย
20	1260 ลูกบาศก์เซนติเมตร
21	180π ลูกบาศก์เซนติเมตร

MathStandard
MathStandard
MathStandard

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ

ตอนที่ 1 ปริซึมและทรงกระบอก

ข้อ 1 ความจุเท่ากับผลคูณของขนาดภายในทั้งสามด้าน คือ $8(15)(10) = 1{,}200$

ตอบ 1200 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ข้อ 2 มีหน้าสามคู่ พื้นที่รวม $2[6(10) + 6(8) + 10(8)] = 376$

ตอบ 376 ตารางเซนติเมตร

ข้อ 3 พื้นที่ฐาน $\pi 5^2 = 25\pi$ คูณความสูง 12 ได้ 300π

ตอบ 300π ลูกบาศก์เซนติเมตร

ข้อ 4 ใช้ 1 ลิตรเท่ากับ 1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร ได้ $12.5(1{,}000) = 12{,}500$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตอบ 12,500 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ข้อ 5 พื้นที่ผิวเท่ากับ $2[5(8) + 5(10) + 8(10)] = 340$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 340 ตารางเซนติเมตร

ข้อ 6 รวมฐานสองหน้ากับผิวข้าง ได้ $2\pi 4^2 + 2\pi(4)(9) = 104\pi$

ตอบ 104π ตารางเซนติเมตร

ข้อ 7 นับก้นหนึ่งหน้าและด้านข้างสี่หน้า ได้ $12(18) + 2(12)(5) + 2(18)(5) = 516$

ตอบ 516 ตารางเซนติเมตร

ข้อ 8 แท่งที่ได้มีขนาด $3 \times 3 \times 21$ พื้นที่ผิว $2[3(3) + 3(21) + 3(21)] = 270$

ตอบ 270 ตารางเซนติเมตร

ข้อ 9 จำนวนลูกบาศก์ทั้งหมดคือ $2 + 4 + 1 + 3 + 3 + 2 + 4 + 1 = 20$ แต่ละลูกมีปริมาตร $2^3 = 8$ จึงได้ปริมาตรรวม $20(8) = 160$

ตอบ 160 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ข้อ 10 ปริมาตรแท่น 240,000 และปริมาตรบล็อกหนึ่งก้อน 1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร จึงใช้ 240 ก้อน คิดเป็นเงิน $240(8) = 1{,}920$

ตอบ 1920 บาท

ข้อ 11 สันใหญ่ยาว $\sqrt{\frac{864}{6}} = 12$ และสันเล็กยาว $\sqrt{\frac{54}{6}} = 3$ เซนติเมตร แต่ละแนวแบ่งได้ 4 ลูก จำนวนทั้งหมด $4^3 = 64$

ตอบ 64 ลูก