



MathStandard

สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์

เตรียมความพร้อมเข้า ม.4

www.mathstandard.com

จำนวนและพีชคณิต

1.1 จำนวนเต็มและตัวประกอบ

จำนวนเต็มประกอบด้วยจำนวนเต็มลบ ศูนย์ และจำนวนเต็มบวก การพิจารณาว่าจำนวนหนึ่งแบ่งเป็นกลุ่มเท่า ๆ กันได้หรือไม่ นำไปสู่แนวคิดเรื่องตัวประกอบและการหารลงตัว

จำนวนเฉพาะและการแยกตัวประกอบ

จำนวนเฉพาะคือจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และมีตัวประกอบบวกเพียง 1 กับตัวมันเอง เช่น 2, 3, 5, 7, 11 ส่วน 1 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ จำนวนเต็มบวกทุกจำนวนที่มากกว่า 1 เขียนเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะได้โดยไม่ซ้ำลำดับของตัวประกอบ

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

ห.ร.ม. คือจำนวนเต็มบวกมากที่สุดที่หารจำนวนที่กำหนดลงตัวทุกจำนวน ส่วน ค.ร.น. คือจำนวนเต็มบวกน้อยที่สุดที่เป็นพหุคูณของทุกจำนวนที่กำหนด ในรูปแยกตัวประกอบ ห.ร.ม. เลือกกำลังน้อยที่สุด และ ค.ร.น. เลือกกำลังมากที่สุดของจำนวนเฉพาะแต่ละตัว โดยถือว่าตัวที่ไม่ปรากฏมีเลขชี้กำลังเป็นศูนย์

$$\gcd(72, 120) = 2^3 \cdot 3 = 24, \quad \text{lcm}(72, 120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

สำหรับจำนวนเต็มบวกสองจำนวน a, b มีความสัมพันธ์

$$\gcd(a, b) \text{ lcm}(a, b) = ab$$

จำนวนตัวประกอบบวก

ถ้า $N = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ โดย $p_1, \dots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะต่างกัน และ e_i เป็นจำนวนเต็มบวก ตัวประกอบของ N เลือกกำลังของ p_i ได้ตั้งแต่ 0 ถึง e_i จึงมีทั้งหมด

$$d(N) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_k + 1)$$

ตัวอย่าง รั้วบ้นยาว 48 และ 60 เซนติเมตร ต้องตัดเป็นชิ้นยาวเท่ากันให้ยาวที่สุดและไม่เหลือเศษ

วิธีทำ ความยาวแต่ละชิ้นต้องหารทั้ง 48 และ 60 ลงตัว จึงใช้ ห.ร.ม. ได้ $\gcd(48, 60) = 12$ เซนติเมตร จะได้ชิ้นรั้วบ้น $4 + 5 = 9$ ชิ้น

72 มีตัวประกอบบวก $(3 + 1)(2 + 1) = 12$ ตัว แต่มีตัวประกอบเฉพาะต่างชนิดเพียง 2 ชนิด คือ 2 และ 3 ซึ่งแตกต่างจากจำนวนตัวประกอบบวก

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.1

ให้ x, y เป็นจำนวนเต็ม ห.ร.ม. ของ y กับ 40 เท่ากับ $\sqrt[3]{x}$ และ $y = \sqrt{576}$ จงหา ค.ร.น. ของ x กับ 480

วิธีทำ

จาก $y = \sqrt{576} = 24$ และ $24 = 2^3 \cdot 3$, $40 = 2^3 \cdot 5$ จึงมี

$$\gcd(y, 40) = \gcd(24, 40) = 8$$

เงื่อนไขให้ $\sqrt[3]{x} = 8$ ดังนั้น $x = 8^3 = 512 = 2^9$ ส่วน $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$ ค.ร.น. เลือกกำลังมากที่สุดของแต่ละจำนวนเฉพาะ จึงได้

$$\text{lcm}(512, 480) = 2^9 \cdot 3 \cdot 5 = 7680$$

ตอบ 7680